



## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 49. Karten-Zeichnung nach rechtwinkligen sphärischen (Soldnerschen)  
Coordinate

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

Von Württemberg aus gelangten diese Coordinaten auch in die Bayerische geodätische Litteratur, nämlich in Bauernfeinds „Elemente der Vermessungskunde, 1. Auflage, II. Band 1858“, S. 201–206, wo (ohne Quellenangabe) ein Auszug aus Bohnenberger „De computandis etc.“ § 15–17 mit drei Zahlenbeispielen Bohnenbergers gegeben sind als „Berechnung einiger Dreiecke der württembergischen Vermessung.“

Soldners Entwicklungen, von 1810 stammend, wurden erst 1873 veröffentlicht in „Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage“, München 1873, S. 263–281.

Alle diese Schriften geben die Grundformeln (14)–(16) § 46. S. 261 und in Betreff der Umkehrung nur die Formeln (3)–(7) S. 270. Die weiteren Formeln (10)–(20) S. 271–272 sind zuerst aufgestellt in unserer 1. Auflage, „Taschenbuch der praktischen Geometrie 1873“, S. 328.

### § 49. Karten-Zeichnung nach rechtwinkligen sphärischen (Soldnerschen) Coordinaten.

Man benutzt die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten zur Karten-Zeichnung, indem man dieselben wie rechtwinklige ebene Coordinaten behandelt.

Dadurch erhält man ein verzerrtes Bild der krummen Erdoberfläche in der Ebene, und es ist unsere Aufgabe, die Verzerrungen, welche hier, wie bei allen anderen ebenen Abbildungen der Erdoberfläche unvermeidlich sind, zu untersuchen.

Hiezu brauchen wir nur die bereits in § 48. entwickelten Formeln anzuwenden.

Wir haben von (10) und (9) § 48. S. 271.

$$s = s_0 \left( 1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6 r^2} (y^2 + y' y + y'^2) \right) \quad (1)$$

$$s_0 = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2} \quad (2)$$

Indem wir in Fig. 1. die Punkte  $A$  und  $B$  mit ihren Coordinaten  $x, y$  und  $x', y'$  im ebenen System dargestellt haben, finden wir offenbar die Entfernung  $s_0$  von (2) als geradlinige Entfernung  $AB$ , und man benutzt das Verhältnis dieser geradlinigen Karten-Entfernung  $s_0$  zu der wahren Entfernung  $s$  zur Berechnung des Verzerrungs-Verhältnisses, d. h. man setzt:

$$v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{y^2 + y' y + y'^2}{6 r^2} \cos^2 \alpha \quad (3)$$

Für eine sehr kurze Linie  $s$  ist  $y' = y$  zu setzen, und dann hat man:

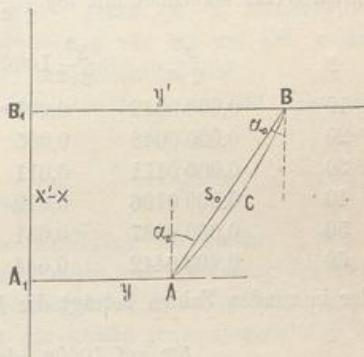
$$v = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \cos^2 \alpha \quad (4)$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für die Vergrößerung einer kurzen Linie in irgend einem Punkte mit der Ordinate  $y$ , in der Richtung  $\alpha$ . Die Vergrößerung  $v$  ist nicht abhängig von der Abscisse  $x$ , sondern nur von der Ordinate  $y$  und von der Richtung  $\alpha$ . In Bezug auf  $\alpha$  erreicht  $v$  seine äußersten Werte mit  $\alpha = 0^\circ$  oder  $180^\circ$  einerseits und mit  $\alpha = 90^\circ$  oder  $270^\circ$  andererseits, nämlich:

$$\alpha = 0^\circ \text{ giebt } v_{\max} = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \text{ (Meridian, } x\text{-Axe)} \quad (5)$$

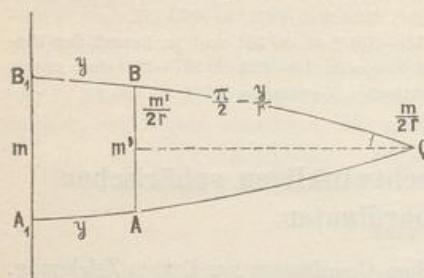
$$\alpha = 90^\circ \text{, } v_{\min} = 1 \quad (\text{West-Ost, } y\text{-Axe}) \quad (6)$$

Fig. 1.  
Soldner sche Coordinaten in ebener Darstellung.



Diese zwei Ergebnisse sind an und für sich leicht verständlich. In der West-Ost-Richtung werden die Ordinaten sowohl auf der Kugel als auch in der Ebene *gleich* aufgetragen, d. h. es ist  $v = 1$ ; dagegen in der Nord-Richtung müssen die

Fig. 2.



ebenen Masse zu gross erscheinen, weil die in Wirklichkeit konvergierenden Ordinaten  $y$  in der ebenen Zeichnung parallel sind.

Hiezu ist Fig. 2. gezeichnet mit dem Masse  $m$  in der Abscissen-Axe selbst und einem Masse  $m'$  parallel der Abscissen-Axe, im Abstand  $y$ . In der Ebene werden aber die Ordinaten  $y$  parallel, also  $m'$  gleich  $m$  dargestellt, und das Vergrösserungs-Verhältnis ist daher  $= \frac{m}{m'}$ . Nach Fig. 2. ist  $AB$

ein Parallelkreisbogen vom Halbmesser  $r' = r \cos \frac{y}{r}$  und da bei  $Q$  der Winkel  $\frac{m}{m'}$  sich findet, hat man:

$$m' = AB = \frac{m}{r} r' = m \cos \frac{y}{r}$$

$$\frac{m'}{m} = \cos \frac{y}{r} = 1 - \frac{y^2}{2r^2} \quad \text{oder} \quad \frac{m}{m'} = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \quad (7)$$

Dieses ist eine Bestätigung von (5).

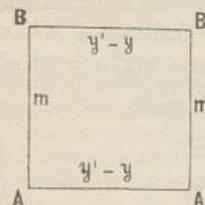
Zur Übersicht der linearen Verzerrungs-Verhältnisse haben wir nach (5) folgende Zahlen-Werte berechnet mit  $\log \frac{1}{2r^2} = 6.08918$  für  $\varphi = 50^\circ$ .

$y$	$\frac{y^2}{2r^2}$	$\frac{y^2}{2r^2} 1000^m$	$y$	$\frac{y^2}{2r^2}$	$\frac{y^2}{2r^2} 1000^m$
10 <sup>km</sup>	0,000 0012	0,001 <sup>m</sup>	70 <sup>km</sup>	0,000 0602	0,060 <sup>m</sup>
20	0,000 0048	0,005	80	0,000 0786	0,079
30	0,000 0111	0,011	90	0,000 0995	0,099
40	0,000 0196	0,020	100	0,000 1228	0,123
50	0,000 0307	0,031	150	0,000 2763	0,276
60	0,000 0442	0,044	200	0,000 4912	0,491

oder in runden Zahlen beträgt die Verzerrung

$$\left. \begin{aligned} 5^m \text{ auf } 1000^m \text{ oder } \frac{1}{20000} \text{ für } y = 64 \text{ Kilometer} \\ 10^m \text{ auf } 1000^m \text{ oder } \frac{1}{10000} \text{ für } y = 90 \text{ Kilometer} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Fig. 3.



Wenn ein rechteckiges Kartenblatt  $A B A' B'$  (Fig. 3.)

in der beschriebenen Weise behandelt wird, so erscheint zwar der Südrand  $A A'$  und der Nordrand  $B B'$  in richtiger Grösse, dagegen der Westrand  $A B$  und der Ostrand  $A' B'$  werden etwas zu gross.

Wir wollen annehmen, der Westrand  $A B$  habe die Ordinate  $y = 90000^m$  und der Ostrand  $A' B'$  habe  $y' = 100000^m$ , dann wird nach der Zahlen-Übersicht (8), in der Zeichnung der Westrand um 0,0099 % und der Ostrand um 0,0123 %

zu gross, oder wenn  $A B = A' B' = 1^m$  Papiergrösse hat, so giebt das hier einen Fehler von nur etwa  $0,1^m$ , der aber bei  $y = 200^km$  rasch auf  $0,5^m$  ansteigt.

Solche Verzerrungen mögen in der Karten-Zeichnung und auf dem Messtisch unschädlich sein, in der Messung und Berechnung von Polygon-Zügen sind sie es nicht.

Geht ein solcher Zug von  $1000^m$  Länge in der Meridian-Richtung von einem trigonometrischen Punkte zu einem zweiten trigonometrischen Punkt, so wird, wenn gar keine Messungs-Fehler vorkommen, doch der Zug die Entfernung beider Punkte um  $10^cm$  kleiner geben als die Coordinaten der Punkte, so lange man nur die ebene Coordinaten-Rechnung anwendet.

In Bayern, wo die Ordinaten in dem *einen* System des Münchener Meridians bis zu rund 200 Kilometer betragen, mussten daher in der Zugsberechnung besondere sphärische Korrekturen angebracht werden, über welche berichtet wird in der „Instruktion für neue Katastermessungen in Bayern“, 1885, § 23 und in „Technische Anleitung“ u. s. w. von Dr. J. H. Franke, München 1889, S. 121.

Wir wollen aber gleich hier bemerken, dass die Soldnerschen Coordinaten-Verzerrungen hauptsächlich deswegen schädlich wirken, weil sie nach verschiedenen Seiten verschieden sind. Wir werden später die konformen Coordinaten kennen lernen, bei welchen die Verzerrung in einem Punkte nach allen Richtungen gleich ist, und es ist leicht einzusehen, dass bei konformen Coordinaten jene bayrischen besonderen Reduktionen der Züge überflüssig würden, weil sie einfach als allgemeine Massstabs-Veränderung (etwa als konstante logarithmische Reduktion) auf weitem Gebiete konstant den trigonometrischen Netzehrlern zuzuschlagen wären, ganz ebenso wie die von der Höhe des Landes über dem Meere herrührenden Reduktionen, welche nach § 9. S. 67 für  $h = 100^m$  den Betrag von  $16^{mm}$  auf  $1^m$  geben. Z. B. München mit rund  $500^m$  Höhe hat hieraus eine Massstabsvergrösserung von  $8^m$  auf  $1^m$ , welche, weil nach allen Seiten gleich, auch nicht besonders berücksichtigt wird.

In Württemberg und Baden gehen die Ordinaten bis rund 100 Kilometer, in Preussen bis 70 Kilometer.

#### *Weitere Ausführungen.*

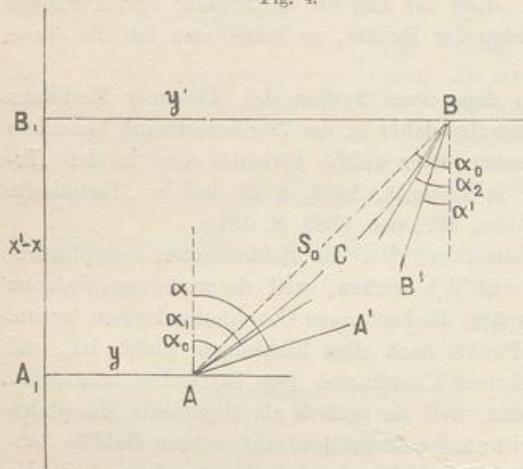
Wenn die Fig. 1. S. 275 nicht bloss eine Abbildung der Punkte  $A$  und  $B$  von der Kugel auf die Ebene vorstellen soll, sondern auch eine Abbildung der Linie  $A B$ , d. h. des auf der Kugel gezogenen Gross-Kreisbogens  $A B$ , so ist zuerst einzusehen, dass in Fig. 1. die Gerade  $A B = s_0$  *nicht* das Abbild jenes Bogens  $A B$  ist, sondern der Bogen  $A C B$ .

Allerdings in Hinsicht auf die Länge ist die Gerade  $A B = s_0$  und der Bogen  $A C B$  in Fig. 1. bei der von uns überhaupt eingehaltenen Genauigkeit von  $\frac{1}{r^2}$  nicht zu unterscheiden, denn die Pfeilhöhe des Bogens  $A C B$  ist nur von der Ordnung  $\frac{s^3}{r^2}$ , und daraus kann man schliessen, dass der Krümmungs-Halbmesser der Kurve von der Ordnung  $\frac{r^2}{s}$ , und endlich dass der Unterschied zwischen dem Bogen  $A C B$  und der Sehne  $A B$  nur von der Ordnung  $\frac{s^5}{r^4}$  ist, was in allen unseren bisherigen Entwicklungen vernachlässigt wurde.

Dagegen in Hinsicht auf die *Richtungen* in  $A$  und  $B$  ist der Bogen  $A C B$

und die Sehne  $AB$  in Fig. 1. durchaus nicht zu verwechseln, und wenn der Bogen  $ACB$  in Fig. 1. das Soldnersche Projektions-Abbild des sphärischen Bogens  $AB$  auf der Urbildkugel Fig. 1. S. 257 ist, dann sind die Richtungs-Winkel, welche diesem Bogen (bzw. seinen Tangenten in  $A$  und  $B$ ) gegen die  $x$ -Axe zukommen, *nicht* die Richtungs-Winkel  $\alpha$  und  $\alpha'$  des Urbildes, weil die Abbildung nicht konform ist.

Fig. 4.



Dieses ist in Fig. 4. nochmals besonders dargestellt, und aus einer besonderen Untersuchung, welche in „Zeitschr. für Verm.“ 1891, S. 289—294 mitgeteilt wurde, stellen wir, ohne auf alles Einzelne einzugehen, folgendes zusammen:  $A$  und  $B$  sind zwei Soldnersche Projektions-Punkte mit den Coordinaten  $xy$  und  $x'y'$ . Die Soldnerische Abbildung des sphärischen Bogens  $AB$  ist die Curve  $ACB$  von Fig. 4., deren Tangenten  $AA'$  und  $BB'$  gewisse Richtungs-Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  haben, welche aber weder den bisher betrachteten  $\alpha$  und  $\alpha'$  noch den  $\alpha_0$  gleich sind; für  $\alpha_0$  hat man:

$$\tan \alpha_0 = \frac{y' - y}{x' - x}$$

Dazu nach (20a) § 48. S. 272:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{x' - x}{6r^2} (2y + y') + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{6r^2} (y^2 + yy' + y'^2) \quad (10)$$

Dann nach „Zeitschr. f. Verm.“ 1891, S. 292:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = \frac{x' - x}{6r^2} (2y + y') (1 + \sin^2 \alpha) \quad (11)$$

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{y^2}{2r^2} \sin \alpha \cos \alpha \quad (12)$$

Bei konformer Projektion verschwindet  $\alpha - \alpha_1$ .

## § 50. Rechtwinklige konforme Coordinaten.

Wir haben gefunden, dass bei den rechtwinkligen Soldnerschen Coordinaten das Vergrösserungs-Verhältnis in der Ebene nach den verschiedenen Richtungen, welche von einem Punkt ausgehen, selbst verschieden ist, es fand sich nämlich in (5) und (6) § 49, S. 275, indem wir nun statt  $v$  das Zeichen  $m$  nehmen:

$$m_x = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \text{ in der Richtung der } x\text{-Axe}$$

$$m_y = 1 \text{ in der Richtung der } y\text{-Axe}$$

Diese Vergrösserungs-Verhältnisse beziehen sich auf eine Zeichnung, in welcher die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten als rechtwinklige ebene Coordinaten, im