



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

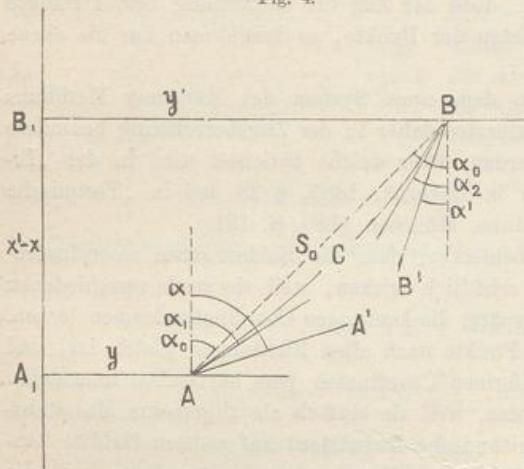
§. 50. Rechtwinklige konforme (Gaußsche) Koordinaten

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](#)

und die Sehne  $AB$  in Fig. 1. durchaus nicht zu verwechseln, und wenn der Bogen  $ACB$  in Fig. 1. das Soldnersche Projektions-Abbild des sphärischen Bogens  $AB$  auf der Urbildkugel Fig. 1. S. 257 ist, dann sind die Richtungs-Winkel, welche diesem Bogen (bzw. seinen Tangenten in  $A$  und  $B$ ) gegen die  $x$ -Axe zukommen, *nicht* die Richtungs-Winkel  $\alpha$  und  $\alpha'$  des Urbildes, weil die Abbildung nicht konform ist.

Fig. 4.



Dieses ist in Fig. 4. nochmals besonders dargestellt, und aus einer besonderen Untersuchung, welche in „Zeitschr. für Verm.“ 1891, S. 289—294 mitgeteilt wurde, stellen wir, ohne auf alles Einzelne einzugehen, folgendes zusammen:  $A$  und  $B$  sind zwei Soldnersche Projektions-Punkte mit den Coordinaten  $x y$  und  $x' y'$ . Die Soldnerische Abbildung des sphärischen Bogens  $AB$  ist die Curve  $A'CB'$  von Fig. 4., deren Tangenten  $A'A'$  und  $B'B'$  gewisse Richtungs-Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  haben, welche aber weder den bisher betrachteten  $\alpha$  und  $\alpha'$  noch den  $\alpha_0$  gleich sind; für  $\alpha_0$  hat man:

$$\tan \alpha_0 = \frac{y' - y}{x' - x}$$

Dazu nach (20a) § 48. S. 272:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{x' - x}{6 r^2} (2y + y') + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{6 r^2} (y^2 + yy' + y'^2) \quad (10)$$

Dann nach „Zeitschr. f. Verm.“ 1891, S. 292:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = \frac{x' - x}{6 r^2} (2y + y') (1 + \sin^2 \alpha) \quad (11)$$

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{y^2}{2 r^2} \sin \alpha \cos \alpha \quad (12)$$

Bei konformer Projektion verschwindet  $\alpha - \alpha_1$ .

## § 50. Rechtwinklige konforme Coordinaten.

Wir haben gefunden, dass bei den rechtwinkligen Soldnerschen Coordinaten das Vergrösserungs-Verhältnis in der Ebene nach den verschiedenen Richtungen, welche von einem Punkt ausgehen, selbst verschieden ist, es fand sich nämlich in (5) und (6) § 49, S. 275, indem wir nun statt  $v$  das Zeichen  $m$  nehmen:

$$m_x = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \text{ in der Richtung der } x\text{-Axe}$$

$$m_y = 1 \text{ in der Richtung der } y\text{-Axe}$$

Diese Vergrösserungs-Verhältnisse beziehen sich auf eine Zeichnung, in welcher die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten als rechtwinklige ebene Coordinaten, im

übrigen aber in natürlicher Grösse aufgetragen werden, so dass die Grosskreisbögen  $x$  und  $y$  auf der Kugel sich nachher im Abbild in der Ebene als Gerade darstellen.

Wir wollen nun eine andere Art der ebenen Abbildung betrachten, bei welcher das Vergrösserungs-Verhältnis in jedem Punkte nach allen Richtungen dasselbe sein soll.

Man nennt eine solche Abbildung „konform“ nach dem Vorgange von Gauss, welcher die allgemeine Theorie solcher Abbildungen aufgestellt und die konformen Abbildungen zuerst in die trigonometrischen Berechnungen eingeführt hat.

Unter *konformer* Abbildung im allgemeinen versteht man eine solche geometrische Beziehung zwischen zwei Flächen, dass jedem Punkte der einen Fläche ein bestimmter Punkt der anderen Fläche entspricht, und dass das Abbild dem Urbild in den kleinsten Teilen *ähnlich* ist.

Die letztere Bedingung ist durch nebenein stehende Fig. 1. und Fig. 2. deutlicher gemacht in diesem Sinne:

Es seien  $A, B, C$  drei unter sich sehr nahe liegende Punkte einer gegebenen Fläche (Urbild) und  $A' B' C'$  die entsprechenden Punkte einer anderen Fläche (Abbild); die Abbildung soll nach einem solchen Gesetze erfolgen, dass das kleine Dreieck  $A' B' C'$  dem entsprechenden kleinen Dreieck  $A B C$  ähnlich wird, dass also die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  beider Dreiecke einander gleich sind und dass zwischen den Seiten ein konstantes Verhältnis besteht:

$$\frac{A' B'}{A B} = \frac{B' C'}{B C} = \frac{C' A'}{C A} = m \quad (1)$$

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen gehen wir über zu den rechtwinkligen konformen Coordinaten, welche Gauss etwa um 1820—1830 in der Hannoverschen Landesvermessung eingeführt hat, aber wir geben zunächst nur die sphärische Theorie mit Gliedern bis zu  $1:r^2$  einschliesslich, d. h. das Analogon zu den in § 46. behandelten Soldnerschen Coordinaten.

In Fig. 3. wird die Erde kugelförmig dargestellt mit dem Nordpol  $N$ , dem Südpol  $N'$  und einem Meridian  $N O N'$ . Alle Grosskreise, welche rechtwinklig auf diesem Meridian von  $O$  stehen, müssen sich in den Polen  $Q$  und  $Q'$  des Meridians schneiden.

Zwei solche auf dem Haupt-Meridian rechtwinklige Grosskreise sind die beiden Bögen  $Q D Q'$  und  $Q E Q'$ , welche zur Bestimmung der rechtwinkligen Coordinaten zweier Punkte  $F$  und  $G$  dienen, indem  $O D = x$  die Abscisse von  $F$  und  $D F = y$  die Ordinate von  $F$  ist, und

Fig. 1.  
Urbild.

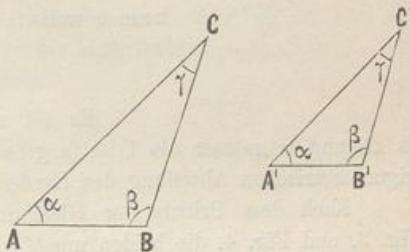


Fig. 2.  
Abbild.

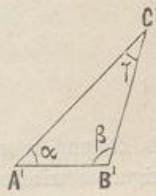
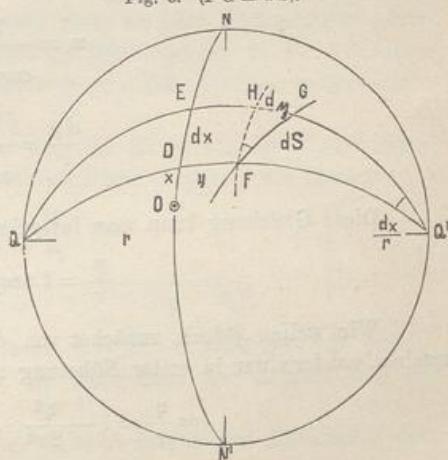


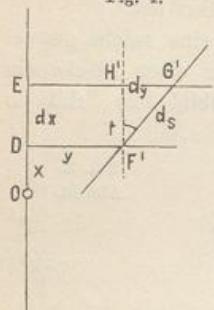
Fig. 3. ( $F G = dS$ ).



ebenso ist  $OE$  die Abscisse und  $EG$  die Ordinate von  $G$ , wobei  $DF = EH$ , also  $FH$  eine geodätische Parallelle zu  $DE$ .

Die Koordinatenlinien zwischen  $O$  und  $FG$  sind geradlinig abgebildet in Fig. 4., indem  $DF'$  und  $EG'$  parallel und beide rechtwinklig auf  $ODE$  sind, mit  $OD = x$  und  $DE = dx$  in beiden Systemen gleich, oder im Sinne der Abbildung kongruent,

Fig. 4.



während  $DF' = y$  mit  $DF = y$  nicht gleich ist, auch  $EG'$  nicht gleich mit  $EG$ , sondern es sollen die Abbildungs-Ordinaten  $y$  im Vergleich mit den Urbilds-Ordinaten  $\gamma$  gewisse Verzerrungen erleiden, deren Gesetz dadurch bestimmt wird, dass das rechtwinklige Differential-Dreieck  $F'HG'$  dem Dreieck  $FHG$  ähnlich wird. Indem man die Hypotenzen in diesen Dreiecken mit  $ds$  und  $dS$  bezeichnet, wird man das Verhältnis dieser Hypotenzen betrachten, welches wir  $m$  nennen wollen:

$$\frac{ds}{dS} = m \quad (2)$$

Es sei auch gleich bemerkt, dass immer  $ds$  grösser als  $dS$  und  $m$  grösser als 1 ist ( $s$  grösser als  $S$  nach feststehender Bezeichnung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme).

Nach dem Prinzip der Gleichung (1) mit Fig. 1. und Fig. 2. sollen nun in Fig. 3. und Fig. 4. die beiden unendlich kleinen Dreiecke  $FGH$  und  $F'G'H'$  einander ähnlich sein, woraus folgt:

$$\frac{F'H'}{FH} = \frac{H'G'}{HG} = m \quad (3)$$

Hierbei ist  $F'H = dx$      $H'G' = dy$

und  $FH$  als Parallelkreisbogen im Abstande  $\gamma$  von  $DE$  hat einen Parallelkreishalbmesser  $r' = r \cos \frac{\gamma}{r}$ , und da bei  $Q'$  der Winkel  $= \frac{dx}{r}$  sich findet, hat man:

$$FH = r' \frac{dx}{r} = dx \cos \frac{\gamma}{r} \quad \text{und} \quad HG = d\gamma \quad (4)$$

Aus (3) und (4) hat man:

$$m = \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{r}} = \frac{dy}{d\gamma} \quad (5)$$

$$\frac{dy}{r} = \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{r}} \frac{d\gamma}{r} \quad (6)$$

Diese Gleichung kann man integrieren, nämlich:

$$\frac{\gamma}{r} = l \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2r} \right) \quad (7)$$

Wir wollen jedoch zunächst von der strengen Integration keinen Gebrauch machen, sondern nur in erster Näherung rechnen:

$$\cos \frac{\gamma}{r} = 1 - \frac{\gamma^2}{2r^2}, \quad \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{r}} = 1 + \frac{\gamma^2}{2r^2}$$

also nach (5):

$$dy = \left(1 + \frac{y^2}{2r^2}\right) dy \quad (8)$$

$$y = y + \frac{y^3}{6r^2} \quad (9)$$

Dadurch ist die Beziehung zwischen  $y$  und  $\eta$  bestimmt und ebenso auch das Vergrößerungsverhältnis  $m$ ; indessen kann dabei in den Korrektionsgliedern auch  $\eta$  und  $y$  vertauschen, also:

$$m = 1 + \frac{\eta^2}{2r^2} \quad \text{oder } m = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \quad (10)$$

$$\text{und } \frac{1}{m} = 1 - \frac{\eta^2}{2r^2} \quad \text{oder } \frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2r^2}$$

Dieses gilt in differentialem Sinne in einem Punkte nach allen Richtungen, oder in einem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck, wie z. B.  $F'G'H'$  Fig. 4., gilt derselbe Wert  $m$  für beide Katheten und für die Hypotenuse.

Wir gehen nun von einem unendlich kleinen Bogen über zu einem endlichen Bogen  $AB$  in Fig. 5., dessen Endpunkte  $A$  und  $B$  die Projektions-Koordinaten  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  haben, und wir überzeugen uns zuerst, dass in Fig. 3. und Fig. 4. der Bogen  $FG$  sich in eine Linie  $F'G'$  abbildet, welche bei unendlich kleiner Ausdehnung als Gerade gilt, welche aber bei endlicher Entfernung nicht mehr geradlinig wird, sondern krummlinig, wie in Fig. 5. zu sehen ist, in welcher die Kurve  $AB$  als Abbild eines entsprechenden Bogens der Kugel auftritt, während die Gerade  $AB$  lediglich Hilfslinie in der Projektion ist.

Von dieser Kurve  $AB$  in Fig. 5. kann man auch alsbald sagen, dass sie gegen den Abscissenmeridian  $ON$  konkav sein muss, denn das geradlinige Viereck  $A_1B_1BA$  hat eine Winkelsumme =  $360^\circ$ , während das entsprechende sphärische Viereck wegen des sphärischen Excessen mehr als  $360^\circ$  Winkelsumme haben muss. Da aber wegen der Konformität die richtige Winkelsumme in der Abbildung erhalten werden muss, wird die konforme Abbildung der Linie  $AB$  sich in dem Sinne gekrümmt darstellen müssen, wie Fig. 5. zeigt.

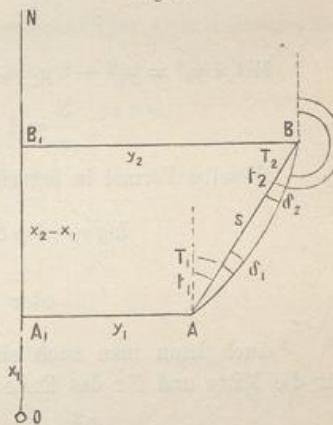
Mit den Bezeichnungen von Fig. 5. hat man für die geradlinige Entfernung  $s$  und den Richtungswinkel  $t_1$  in dem ebenen rechtwinkligen Systeme, wie immer:

$$\begin{aligned} \tan t_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ s &= \frac{y_2 - y_1}{\sin t_1} = \frac{x_2 - x_1}{\cos t_1} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (11)$$

In erster Näherung kann die Sehnenlänge  $AB$  der Bogenlänge  $AB$  gleichgesetzt werden, oder es kann mit  $ds$  sowohl das Differential der Geraden  $AB$  als auch des Bogens  $AB$  bezeichnet werden.

Andererseits sei  $S$  die sphärische in Fig. 5. nicht dargestellte Entfernung der Punkt  $A$  und  $B$ , dann besteht die Differentialgleichung:

Fig. 5.



$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{m} ds = \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right) ds \\ S &= s - \int \frac{y^2}{2r^2} ds = s - \int \frac{y^2}{2r^2} \frac{dy}{\sin t} \\ S &= s - \frac{1}{2r^2 \sin t} \frac{y^3}{3} + \text{Integr.-Const.} \end{aligned}$$

Zwischen den Grenzen  $y_1$  und  $y_2$  giebt dieses:

$$\begin{aligned} S &= s - \frac{1}{6r^2 \sin t} (y_2^3 - y_1^3) \\ S &= s - \frac{1}{6r^2} \frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2 - y_1} \frac{y_2 - y_1}{\sin t} = s - \frac{1}{6r^2} \frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2 - y_1} s \\ \frac{S}{s} &= 1 - \frac{1}{6r^2} \frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2 - y_1} = 1 - \frac{1}{6r^2} (y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Dieses ist bereits eine brauchbare Formel, man kann sie aber noch passend umformen durch Einführen der Mittel-Ordinate

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_0 \quad (12a)$$

Mit  $4y_0^2 = y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2$  wird (12) auf diese Form gebracht:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{12r^2} (y_1^2 + 4y_0^2 + y_2^2) \quad (13)$$

Dieselbe Formel in logarithmischer Form lautet:

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{12r^2} (y_1^2 + 4y_0^2 + y_2^2) \quad (14)$$

$$\text{oder } = \frac{\mu}{12r^2} (y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 + y_2^2) \quad (15)$$

Auch kann man noch eine andere Form bilden, indem man für den Anfang, für die Mitte und für das Ende der Strecke drei Werte  $m$  ausrechnet in dieser Weise:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + \frac{y_1^2}{2r^2} & m_0 &= 1 + \frac{(y_1 + y_2)^2}{8r^2} & m_2 &= 1 + \frac{y_2^2}{2r^2} \\ \text{oder } \frac{1}{m_1} &= 1 - \frac{y_1^2}{2r^2} & \frac{1}{m_0} &= 1 - \frac{(y_1 + y_2)^2}{8r^2} & \frac{1}{m_2} &= 1 - \frac{y_2^2}{2r^2} \\ \text{und dann } & & \frac{s}{S} &= \frac{1}{6} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) \\ \text{oder auch logarithmisch: } & & & & & \end{aligned} \quad (16)$$

$$\log s - \log S = \frac{\log m_1 + 4 \log m_0 + \log m_2}{6} \quad (17)$$

Wenn die Differenzen  $(y_2 - y_1)$  und  $(x_2 - x_1)$  verhältnismässig klein sind, gegen die  $y_1$  und  $y_2$  selbst, so dient die Formel:

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{8r^2} (y_1 + y_2)^2 + \frac{\mu}{24r^2} (y_2 - y_1)^2 \quad (18)$$

Wenn  $(y_2 - y_1)$  sehr klein ist im Vergleich mit  $y_1$  und  $y_2$ , so kann man das zweite Glied hier gegen das erste vernachlässigen.

Übergehend zur Bestimmung der Richtungs-Reduktionen knüpfen wir nochmals an die Betrachtung an, welche im Vorstehenden zu der Erkenntnis geführt hat, dass

die konforme Abbildung des Grosskreisbogens  $FG$  von Fig. 3. sich in Fig. 5. als eine flache Kurve darstellen muss, welche in Fig. 5. nach rechts hin konvex sein muss.

Diese Betrachtung giebt auch sofort die Summe der beiden kleinen Winkel  $\delta_1$  und  $\delta_2$ , denn diese Summe  $\delta_1 + \delta_2$  muss gleich dem sphärischen Excess des Vierecks sein, d. h. auf  $\frac{1}{r^2}$  einschliesslich genau:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2 r^2} \quad (19)$$

Wenn die beiden Punkte  $A$  und  $B$  sehr nahe zusammenrücken, so giebt dieses die Differentialformel:

$$2\delta = \frac{dx \cdot dy}{r^2} \quad (20)$$

Die Formel (19) ist nichts anderes als die Ordinaten-Konvergenz, welche auch bei den Soldnerschen Koordinaten § 46. in (12) und (19) S. 261 u. 262 auf zwei verschiedenen Wegen so gefunden worden ist.

Nun betrachten wir in Fig. 6. ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Ursprung im Punkte  $A$  liegt, dessen Abscissenrichtung  $+\xi$  von  $A$  nach  $B$  und dessen Ordinatenrichtung  $+y$  rechtwinklig zu  $AB$  liegen soll. Wenn in diesem Systeme die flache Kurve  $AB$  durch eine Gleichung zwischen  $\xi$  und  $y$  dargestellt ist, so kann der Krümmungs-Halbmesser  $R$  dieser flachen Kurve hinreichend genähert dargestellt werden durch die Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{d \xi^2} \quad (21)$$

Wenn man ausserdem mit  $2\delta$  wie bei (20) die Bogenkrümmung auf die Erstreckung des Bogenelementes  $ds$  bezeichnet, so hat man:

$$ds = R \cdot 2\delta \quad (22)$$

also aus (20)–(22) die Differentialgleichung für  $y$ :

$$\frac{d^2 y}{d \xi^2} = \frac{y}{r^2} \frac{dx}{ds}$$

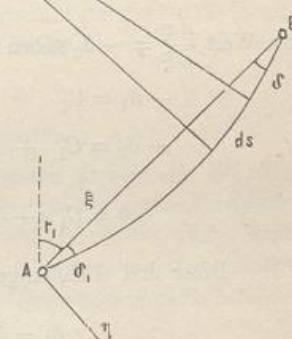
Da man aber auch hinreichend genähert  $ds = d\xi$  setzen darf, so haben wir aus dem Vorstehenden die Differential-Gleichung der Kurve  $AB$ :

$$\frac{d^2 y}{d \xi^2} = \frac{y}{r^2} \frac{dx}{d \xi}$$

Dieses ist zunächst ohne Vorzeichen entwickelt, wenn jedoch die Kurve mit ihrer konkaven Seite gegen die  $\xi$ -Axe liegt, wie in Fig. 6., so muss die zweite Ableitung negativ sein, also:

$$-\frac{d^2 y}{d \xi^2} = \frac{y}{r^2} \frac{dx}{d \xi} \quad (23)$$

Fig. 6.  
( $AB = s$ )



Nach dem Anblick von Fig. 6. hat man in erster Näherung:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \xi \cos t_1 \quad \text{und} \quad y = y_1 + \xi \sin t_1 \\ \frac{dx}{d\xi} &= \cos t_1 \end{aligned}$$

also aus (22):

$$-\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{y_1}{r^2} \cos t_1 + \frac{\xi}{r^2} \sin t_1 \cos t_1 \quad (24)$$

$$\text{oder} \quad -\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = A + B \xi \quad (25)$$

wobei die Bedeutung von  $A$  und  $B$  aus der Vergleichung von (24) und (25) folgt:

$$A = \frac{y_1}{r^2} \cos t_1 \quad B = \frac{\sin t_1 \cos t_1}{r^2} \quad (26)$$

Die Gleichung (25) wird zweimal integriert:

$$-\frac{d\eta}{d\xi} = C_1 + A\xi + \frac{B\xi^2}{2} \quad (27)$$

$$-\eta = C_1\xi + \frac{A\xi^2}{2} + \frac{B\xi^3}{6} \quad (28)$$

Dabei ist  $C_1$  die Integrations-Konstante für die erste Integration, und für die zweite Integration kommt keine Konstante mehr hinzu, weil, wie man sofort überblickt, für  $\xi = 0$  auch  $\eta = 0$  werden muss. Um die Konstante  $C_1$  zu bestimmen, hat man nach dem Anblick von Fig. 6., dass  $\xi = 0$  den Wert  $\frac{d\eta}{d\xi} = +\delta_1$  und  $\xi = s$  den Wert  $\frac{d\eta}{d\xi} = -\delta_2$  geben muss, ebenso muss auch  $\xi = s$  den Wert  $\eta = 0$  geben, also:

$$-\delta_1 = C_1$$

$$+\delta_2 = C_1 + As + \frac{Bs^2}{2}$$

$$0 = C_1s + \frac{As^2}{2} + \frac{Bs^3}{6}, \quad \text{oder} \quad 0 = C_1 + \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{6}$$

Diese drei Gleichungen geben:

$$\delta_1 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{6} \quad \text{und} \quad \delta_2 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{3} \quad (29)$$

Oder wenn man die Bedeutungen von  $A$  und  $B$  nach (26) einsetzt:

$$\delta_1 = \frac{s \cos t_1}{6r^2} (3y_1 + s \sin t_1) \quad \text{und} \quad \delta_2 = \frac{s \cos t_1}{6r^2} (3y_1 + 2s \sin t_1) \quad (30)$$

Endlich, da  $s \sin t_1 = y_2 - y_1$  und  $s \cos t_1 = x_2 - x_1$  ist, kann man dieses auch so schreiben, zugleich mit Zusetzung von  $\varrho$ :

$$T_1 - t_1 = \delta_1 = \frac{\varrho}{6r^2} (x_2 - x_1) (2y_1 + y_2) \quad (31)$$

$$T_2 - t_2 = \delta_2 = \frac{\varrho}{6r^2} (x_1 - x_2) (y_1 + 2y_2) \quad (32)$$

Diese Formeln werden von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme meist in dieser Form geschrieben:

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{4r^2} (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - \frac{\varrho}{12r^2} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (33)$$

$$T_2 - t_2 = \frac{\varrho}{4r^2} (x_1 - x_2)(y_2 + y_1) - \frac{\varrho}{12r^2} (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \quad (34)$$

Diese Formeln, welche mit den vorhergehenden algebraisch identisch sind, sollen dazu dienen, die relative Kleinheit der zweiten Teile auszudrücken für den Fall, dass die Coordinaten-Differenzen  $(x_2 - x_1)$  und  $(y_2 - y_1)$  verhältnismässig klein sind gegen die Ordinaten  $y_1$  und  $y_2$  selbst, was bei Triangulierung III. Ordnung entfernt von der Axe eintritt; und dann kann man häufig die zweiten Glieder in (33) und (34) gegen die ersten Glieder sogar vernachlässigen.

#### Gleichung der Kurve A B.

Nachdem die Coefficienten  $A, B$  nebst der Integrations-Konstanten  $C_1$  bestimmt sind, kann auch die Kurvengleichung nach (23) angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \eta &= +\delta_1 \xi - \frac{A \xi^2}{2} - \frac{B \xi^3}{6} = \frac{A s}{2} \xi + \frac{B s^2}{6} \xi - \frac{A \xi^2}{2} - \frac{B \xi^3}{6} \\ \eta &= \frac{A \xi}{2} (s - \xi) + \frac{B \xi^2}{6} (s^2 - \xi^2) = \frac{y_1 \xi}{2 r^2} \cos t_1 (s - \xi) + \frac{\xi \sin t_1 \cos t_1}{6 r^2} (s^2 - \xi^2) \end{aligned}$$

oder nach Potenzen von  $\xi$  geordnet mit  $s \sin t_1 = y_2 - y_1$ :

$$\eta = \xi \frac{s \cos t_1}{6 r^2} (2 y_1 + y_2) - \frac{\xi^2}{2 r^2} y_1 \cos t_1 - \frac{\xi^3}{6 r^2} \sin t_1 \cos t_1 \quad (35)$$

Hierach erscheint die Kurve A B von Fig. 6. dargestellt durch eine Gleichung dritten Grades, aus welcher man auch nochmals rasch zur Probe die  $\delta_1$  und  $\delta_2$  durch Differentieren bestimmen kann.

#### Ausrechnung der konstanten Coefficienten.

Die vorstehenden Formeln finden zur Zeit am meisten Anwendung bei dem grossen über ganz Preussen sich erstreckenden konformen System der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme, dessen  $x$ -Axe im 31ten Längengrad ( $3^\circ 41,25''$  westlich von der Berliner Sternwarte) und dessen Nullpunkt auf der Breite  $52^\circ 42' 2,53251''$  in diesem Meridian liegt. Der mittlere Erdkrümmungs-Halbmesser für diese Breite, gewöhnlich mit  $A$  bezeichnet, ist:

$$\log A = 6.805\ 0274\ 003$$

und damit sind folgende Konstanten berechnet, indem bei den Coefficienten [mit  $\mu$  der Wert  $\log \mu = 6.6377843$  von S. 193 für Einheiten der 7ten Logarithmenstelle angenommen ist.

$$\begin{array}{llll} \log \frac{1}{2A^2} = 6.0889152 & \log \frac{1}{4A^2} = 5.7878852 & \log \frac{1}{6A^2} = 5.6117939 & \log \frac{1}{12A^2} = 5.3107640 \\ \log \frac{\mu}{2A^2} = 2.7266995 & \log \frac{\mu}{8A^2} = 2.1246395 & \log \frac{\mu}{6A^2} = 2.2495773 & \log \frac{\mu}{24A^2} = 1.6475183 \\ \log \frac{\varrho}{2A^2} = 1.4033403 & \log \frac{\varrho}{4A^2} = 1.1023103 & \log \frac{\varrho}{6A^2} = 0.9262191 & \log \frac{\varrho}{12A^2} = 0.6251891 \end{array}$$

Für die Mittelbreite von Deutschland kann man annehmen  $\varphi = 50^\circ$  und den mittleren Krümmungs-Halbmesser

$$\log r = 6.804\,8936\cdot173$$

und dafür gelten die folgenden Coefficienten:

$$\log \frac{1}{2r^2} = 6.089\,1828 \quad \log \frac{1}{4r^2} = 5.788\,1528 \quad \log \frac{1}{6r^2} = 5.612\,0615 \quad \log \frac{1}{12r^2} = 5.311\,0315$$

$$\log \frac{\mu}{2r^2} = 2.726\,9671 \quad \log \frac{\mu}{8r^2} = 2.124\,9071 \quad \log \frac{\mu}{6r^2} = 2.249\,8458 \quad \log \frac{\mu}{24r^2} = 1.647\,7858$$

$$\log \frac{\varrho}{2r^2} = 1.403\,6079 \quad \log \frac{\varrho}{4r^2} = 1.102\,5779 \quad \log \frac{\varrho}{6r^2} = 0.926\,4866 \quad \log \frac{\varrho}{12r^2} = 0.625\,4567$$

Gewöhnlich braucht man diese Coefficienten nur 4—5 stellig, für alle Fälle haben wir sie hier 7 stellig hergesetzt.

In den Hilfstafeln des Anhanges Seite [45] und [46] haben wir einige Funktionen zur konformen Projektion ausgerechnet, nämlich  $\log m = \frac{\mu}{2A^2} y^2$  auf Seite [46], zunächst bis  $y = 100\,000^m$  mit kleinem Intervall von  $1000^m$  und unten am Schlusse zur allgemeinen Übersicht nur 5 stellig bis  $y = 690^km$ .

Dazwischen von  $y = 230^km$  bis  $255^km$  ist eine besondere Gebrauchstafel für die Gegend von Hannover, welche aber auch auf dem ganzen  $35^km$  breiten Streifen Göttingen—Hannover—Hamburg—Kiel und östlich Neisse—Breslau—Posen—Stolp, gebraucht werden kann. Die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme hat eine solche Tafel für ganz Preussen; es kann sich jedermann für einen gerade in Arbeit genommenen Bereich eine solche Tafel selbst rasch berechnen nach der Gleichung:

$$\log m = \frac{\mu}{2A^2} y^2 = [2.726\,700] y^2$$

Allerdings bei grossen  $y$  kommt noch ein Glied vierter Ordnung hinzu, so dass man hat:

$$\log m = \frac{\mu}{2A^2} y^2 - \frac{\mu}{12A^4} y^4 = [2.726\,6995] y^2 - [8.33849] y^4$$

Dieses werden wir erst später behandeln können.

Die andere Tafel Seite [45] giebt oben die Coordinaten-Vergrösserung

$$Y - y = \frac{y^3}{6A^2} = [5.611\,794] y^3$$

wobei  $Y$  dasselbe bedeutet wie  $y$  in den vorstehenden Entwicklungen zu Fig. 3. S. 279, wo  $y$  die sphärische Ordinate ist. Dann der untere Teil von Seite [45] giebt die differentiale Coordinaten-Verzerrung  $\frac{y^2}{2r^2}$  oder konforme allgemeine Linear-Verzerrung zusammen mit der Höhenreduktion  $\frac{h}{r}$ , worauf im späteren § 52. weitere Schlüsse gegründet werden sollen.