Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 51. Beispiel der konformen Coordinaten-Berechnung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

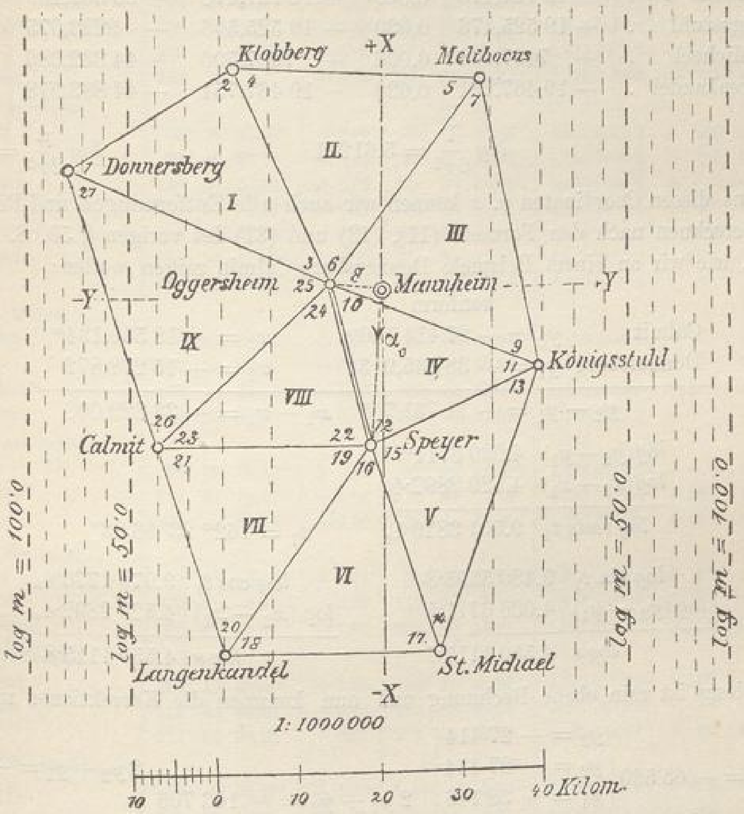
§ 51. Beispiel der konformen Coordinaten-Berechnung.

In nachstehender Fig. 1. wird unser Pfälzer Netz von § 47. nochmals vorgeführt, im wesentlichen wie früher, nur mit einer Schar von Parallel-Linien mit konstantem y, also parallel zur x-Axe, deren Bedeutung im Nachfolgenden erklärt werden wird, während zunächst nur das Netz an sich gebraucht wird.

Wir haben dieses Pfälzische Triangulierungs-Netz, welches in § 47 in Soldnerschen Coordinaten behandelt worden ist, nun in konforme Coordinaten umgerechnet und zwar für die Mittelbreite $\varphi = 49° 30'$ mit den Konstanten:

$$log\, r = 6.804\,8686 \quad , \quad log \frac{1}{6\,r^2} = 5.61211 \quad , \quad log \frac{\mu}{2\,r^2} = 2{\cdot}72702 \qquad (1)$$

Fig. 1.



Wenn man (abweichend von der Bezeichnung $\mathfrak{y}$ in § 50.) die Soldnerschen Ordinaten mit y und die konformen Ordinaten mit Y bezeichnet, so hat man nach (9) § 50. S. 281:

$$Y = y + \frac{y^3}{6\,r^2} = y + [5.612\,11]\, y^3 \qquad (2)$$

und zur Übersicht der Differenzen $Y - y$ kann man den oberen Teil der Tabelle Seite [45] des Anhangs benützen, obgleich derselbe für die Breite $52° 42'$ gilt, während unser Pfälzisches Netz die Mittelbreite $49° 30'$ hat, denn für kleine Ordinaten y macht das fast keinen Unterschied.

Nach vorstehender Formel (2) sind die $Y - y$ in folgender Tabelle berechnet:

Punkt	y Soldner	$\frac{y^3}{6r^2} = Y - y$	Y konform	x	$\log m = \mu \frac{y^2}{2r^2}$
1. Mannheim . . .	0,000^m	^{m}	0,000^m	0,000^m	0·0
2. Speyer	— 1208,142	0,000	— 1208,142	— 18 816,676	0·1
3. Oggersheim . .	— 6001,777	0,001	— 6001,778	+ 388,767	1·9
4. Calmit	— 27 414,066	0,084	— 27 414,150	— 18 550,134	40·1
5. Donnersberg . .	— 38 145,688	0,227	— 38 145,915	+ 15 278,872	77·6
6. Klobberg	— 18 104,628	0,024	— 18 104,652	+ 28 049,296	17·5
7. Melibocus . . .	+ 12 727,470	0,008	+ 12 727,478	+ 26 509,100	8·6
8. Königsstuhl . .	+ 19 525,476	0,030	+ 19 525,506	— 9223,075	20·3
9. St. Michael . .	+ 7407,498	0,002	+ 7407,500	— 44 332,386	2·9
10. Langenkandel .	— 19 467,721	0,030	— 19 467,751	— 44 893,918	20·2

$$\log \frac{1}{6r^2} = 5.61211 \qquad \log \frac{\mu}{2r^2} = 2{\cdot}72702$$

Aus diesen Coordinaten y, x können wir auch alle Entfernungen und Richtungswinkel berechnen nach den Formeln (11), (13) und (31) des vorigen § 50. S. 281, 282 und 284, wie wir an einem Beispiele Donnersberg-Calmit zeigen wollen:

konform

Calmit	$y_2 = -27\,414{,}150^m$	$x_2 = -18\,550{,}134^m$
Donnersberg	$y_1 = -38\,145{,}915$	$x_1 = +15\,278{,}872$
	$y_2 - y_1 = +11\,731{,}765$	$x_2 - x_1 = -33\,829{,}006$

$\log(y_2 - y_1)$	4.030 6711·5
$\log(x_2 - x_1)$	4.529 2892·4$_n$
$\log tang\, t_1$	9.501 3819·1$_n$

$$t_1 = 162^\circ\, 23'\, 56{,}83''$$

$\log \sin t_1$	9.480 5595·8	$\log \cos t_1$	9.979 1776·6$_n$
$\log(y_2 - y_1)$	4.030 6711·5	$\log(x_2 - x_1)$	4.529 2892·4$_n$
$\log s$	4.550 1115·7	$\log s$	4.550 1115·8

Dieses ist rein ebene Rechnung und nun kommen die Korrektionen mit $1 : r^2$.

$$y_2 = -27\,414$$
$$y_1 + y_2 = -65\,560 \quad \begin{vmatrix} y_2 = -27\,414 \\ y_1 = -38\,146 \end{vmatrix} \quad 2y_1 + y_2 = -103\,706 \qquad 2y_2 + y_1 = -92\,974$$
$$y_1 = -38\,146$$

$\log(y_1 + y_2)$	4.81 664	$\log(2y_1 + y_2)$	5.01 582$_n$	$\log(2y_2 + y_1)$	4.96 836$_n$
$\log(y_1 + y_2)^2$	9.63 328	$\log(x_2 - x_1)$	4.52 929$_n$	$\log(x_1 - x_2)$	4.52 929
$\log(\mu : 2r^2)$	2.72 701	$\log(\varrho : 6r^2)$	0.92 654	$\log(\varrho : 6r^2)$	0.92 654
$\log \frac{(y_1 + y_2)^2}{2r^2}$	2.36 029	$\log(T_1 - t_1)$	0.47 165	$\log(T_2 - t_2)$	0.42 419

$$\frac{(y_1 + y_2)^2}{2r^2} = 229{\cdot}24 \qquad T_1 - t_1 = +2{,}962'' \qquad T_2 - t_2 = -2{,}656''$$

Abriss der Triangulierung des Netzes Fig. 1. S. 287 mit konformen Coordinaten.

Stationen und Zielpunkte	Richtungswinkel sphärisch T	Richtungswinkel $t-T$	Richtungswinkel eben t	Entfernung sphärisch $log\ s$	Entfernung $log\ s$ $-log\ S$	Entfernung eben $log\ s$
1. Mannheim.						
Speyer	183° 40′ 25,29″	− 0,02″	183° 40′ 25,27″	4.275 4362·3	+ 0·0	4.275 4362·3
Oggersheim	273 42 22,23	+ 0,00	273 42 22,23	3.779 1890·8	+ 0·6	3.779 1891·4
2. Speyer.						
Mannheim	3° 40′ 25,23″	+ 0,04″	3° 40′ 25,27″	4.275 4362·3	+ 0·0	4.275 4362·3
Königsstuhl	65 10 11,05	− 0,14	65 10 10,91	4.358 8019·1	+ 6·2	4.358 8025·3
St. Michael	161 20 31,87	+ 0,11	161 20 31,98	4.430 2529·9	+ 0·8	4.430 2530·7
Langenkandel	215 0 1,16	− 0,48	215 0 0,68	4.502 8974·0	+ 7·4	4.502 8981·4
Calmit	270 34 57,83	+ 0,02	270 34 57,85	4.418 4219·3	+ 14·0	4.418 4233·3
Oggersheim	345 59 7,47	+ 0,14	345 59 7,61	4.296 5476·5	+ 0·8	4.296 5477·3
3. Oggersheim.						
Melibocus	35° 38′ 31,00″	− 0,02″	35° 38′ 30,98″	4.507 0618·9	+ 2·2	4.507 0621·1
Mannheim	93 42 22,23	− 0,00	93 42 22,23	4.779 7890·8	+ 0·6	4.779 7891·4
Königsstuhl	110 37 58,62	+ 0,06	110 37 58,68	4.435 7946·2	+ 5·3	4.435 7951·5
Speyer	165 59 7,82	− 0,21	93 59 7,61	4.296 5476·5	+ 0·8	4.296 5477·3
Calmit	228 30 28,54	− 0,63	228 30 27,91	4.456 1549·5	+ 16·9	4.456 1566·4
Donnersberg	294 51 17,20	+ 0,63	294 51 17,83	4.549 3120·2	+ 30·6	4.549 3150·8
Klobberg	336 22 4,82	+ 0,70	336 22 5,52	4.479 8976·1	+ 8·4	4.479 8984·5
4. Calmit.						
Oggersheim	48° 30′ 26,94″	+ 0,97″	48° 30′ 27,91″	4.456 1549·5	+ 16·9	4.456 1566·4
Speyer	90 34 57,90	− 0,05	90 34 57,85	4.418 4219·3	+ 14·0	4.418 4233·3
Langenkandel . . .	163 12 53,74	− 1,65	73 12 52,09	4.439 5851·8	+ 29·8	4.439 5881·6
Donnersberg	342 23 54,17	+ 2,66	342 23 56,83	4.550 1057·9	+ 57·8	4.550 1115·7
5. Donnersberg.						
Klobberg	57° 29′ 38,99″	+ 1,02″	57° 29′ 40,01″	4.375 9183·2	+ 44·0	4.375 9227·2
Oggersheim	114 51 18,87	− 1,04	114 51 17,83	4.549 3120·2	+ 30·6	4.549 3150·8
Calmit	162 23 59,79	− 2,96	162 23 56,83	4.550 1057·9	+ 57·8	4.550 1115·7
6. Klobberg.						
Melibocus	92° 51′ 35,28″	− 0,03″	92° 51′ 35,25″	4.489 5442·7	+ 4·6	4.489 5447·3
Oggersheim	156 22 6,51	− 0,99	156 22 5,52	4.479 8976·1	+ 8·4	4.479 8984·5
Donnersberg	237 29 40,81	− 0,80	237 29 40,01	4.375 9183·2	+ 44·0	4.375 9227·2
7. Melibocus.						
Königsstuhl	169° 13′ 40,29″	+ 1,36″	169° 13′ 41,65″	4.560 7787·6	+ 14·1	4.560 7801·7
Oggersheim	215 38 30,55	+ 0,43	215 38 30,98	4.507 0618·9	+ 2·2	4.507 0621·1
Klobberg	272 51 35,26	− 0,01	272 51 35,25	4.489 5442·7	+ 4·6	4.489 5447·3
8. Königsstuhl.						
St. Michael	199° 2′ 30,37″	+ 1,38″	199° 2′ 31,75″	4.569 8613·6	+ 10·3	4.569 8623·9
Speyer	245 10 10,60	+ 0,31	245 10 10,91	4.358 8019·1	+ 6·2	4.358 8025·3
Oggersheim	290 37 58,95	− 0,27	290 37 58,68	4.435 7946·2	+ 5·3	4.435 7951·5
Melibocus	349 13 43,21	− 1,56	349 13 41,65	4.560 7787·6	+ 14·1	4.560 7801·7
9. St. Michael.						
Königsstuhl	19° 2′ 32,77″	− 1,02″	19° 2′ 31,75″	4.569 8613·6	+ 10·3	4.569 8623·9
Langenkandel . . .	268 48 10,93	− 0,00	268 48 10,93	4.429 4468·0	+ 5·1	4.429 4473·1
Speyer	341 20 32,27	− 0,29	341 20 31,98	4.430 2529·9	+ 0·8	4.430 2530·7
10. Langenkandel.						
Speyer	34° 59′ 59,80″	+ 0,88″	35° 0′ 0,68″	4.502 8974·0	+ 7·4	4.502 8981·4
St. Michael	88 48 10,92	+ 0,01	88 48 10,93	4.429 4468·0	+ 5·1	4.429 4473·1
Calmit	343 12 50,61	+ 1,48	343 12 52,09	4.439 5851·8	+ 29·8	4.439 5881·6

Zu 22924, welches $= 4 \log m_0$ ist, nehmen wir die schon in der Tabelle S. 288 stehenden $\log m_2 = 40{\cdot}1$ und $\log m_1 = 77{\cdot}6$ für Calmit und Donnersberg und daraus für unsere Strecke:

$$\log s - \log S = \frac{77{\cdot}6 + 229{\cdot}24 + 40{\cdot}1}{6} = 57{\cdot}8 \tag{3}$$

In Zusammenfassung haben wir also:

$$\begin{array}{lll} \log s = 4.550\,1115{\cdot}7 & t_1 = 162^\circ\, 23'\, 56{,}83'' & t_2 = 342^\circ\, 23'\, 56{,}83'' \\ \qquad\quad -57{\cdot}8 & \qquad +2{,}96 & \qquad -2{,}66 \\ \hline \log S = 4.550\,1057{\cdot}9 & T_1 = 162^\circ\, 23'\, 59{,}79'' & T_2 = 342^\circ\, 23'\, 54{,}17'' \\ & \text{Donnersberg} & \text{Calmit} \end{array} \tag{4}$$

So sind diese Werte in dem Abrisse von S. 289 eingesetzt, und der ganze Abriss ist so entstanden, da wir die Coordinaten als gegeben angenommen haben.

Wenn umgekehrt die ganze Triangulierung mit einer Basis und einem Ausgangsazimut bezw. Ausgangsrichtungswinkel berechnet wird, so hat man im wesentlichen dasselbe zu thun. Man rechnet am bequemsten vorläufige Coordinaten nur etwa auf 1^m genau, die man ja zu anderen Zwecken meist ohnehin braucht, die Dreiecksseiten S hat man aus der Netzausgleichung und Netzberechnung; rechnet man dazu alle $\log s - \log S$ und zunächst nur das erste $t - T$, so kann man die ganze Coordinaten-Rechnung in der Ebene durchführen und braucht nur noch die sämtlichen $t - T$ zuzufügen, um den ganzen Abriss von S. 289 aufzustellen. In dieser Weise haben wir schon früher das Hannoversche Stadt-Netz im konformen System der Landesaufnahme behandelt in unserem I. Band, 4. Aufl. 1895, Abriss S. 204.

Die Vergleichung dieses Verfahrens mit der Soldnerschen Methode (Abriss § 48. S. 265) fällt zum Nachteil der Soldnerschen Methode und zum Vorteil der konformen Methode aus.

Tabellarische und graphische Behandlung der Reduktionen.

Da das Vergrösserungsverhältnis m nur von der Ordinate y abhängt, kann man es leicht tabulieren, z. B. für das Pfälzische Netz mit $\varphi = 49^\circ\, 30'$ und $\log r = 6.80487$ hat man die Hauptwerte

$$\left.\begin{array}{rccccc} y = & 10\,000^m & 20\,000^m & 30\,000^m & 40\,000^m & 50\,000^m \\ \log m = \dfrac{\mu\, y^2}{2\, r^2} = & 5{\cdot}3 & 21{\cdot}3 & 48{\cdot}0 & 85{\cdot}3 & 133{\cdot}4 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Eine ausführliche Gebrauchstabelle wäre leicht herzustellen. Wir wollen darauf hier nicht eingehen, aber noch die graphische Behandlung der Sache bemerken. Man kann das Netzbild mit einer Schar von Parallelen zur x-Axe, also Parallelen für konstante y überziehen, welche gewissen runden Werten von m oder von $\log m$ entsprechen und damit kann man für jeden Punkt sein $\log m$ abstechen.

In unserem Falle ist

$$\log m = \frac{\mu}{2\, r^2}\, y^2 \qquad \text{mit } \log \frac{\mu}{2\, r^2} = 2.72\,702 - 10$$

$$y = \sqrt{\frac{2\, r^2}{\mu}}\, \sqrt{\log m} = [3.63\,649]\, \sqrt{\log m} \tag{6}$$

Danach ist folgendes berechnet:

$log\, m =$	10·0	20·0	30·0	40·0	50·0	60·0	70·0	80·0	90·0	100·0
$y =$	$13{,}7^{km}$	19,4	23,7	27,4	30,6	33,5	36,2	38,7	41,1	$43{,}3^{km}$

Hiernach sind die Parallelen in Fig. 1. gezeichnet; man kann daraus z. B. abnehmen (S. 287):

Donnersberg	Mitte	Calmit
78	57	40

$$log\, s - log\, S = \frac{78 + 4\cdot 57 + 40}{6} = \frac{78 + 228 + 40}{6} = \frac{346}{6}$$

$$log\, s - log\, S = 57\cdot 7$$

Dieses soll dasselbe sein wie das frühere 57·8 in (3).

In dem kleinen Netzbilde von Fig. 1. ist die graphische Interpolation für $log\, m$ wohl nicht völlig genügend, aber jedenfalls zur Kontrolle der Rechnung nützlich; hat man Netze II. und III. Ordnung entfernt von der Hauptaxe, wo die $log\, m$ grösser und die Parallelen mehr gleichabständig werden, so wird das Verfahren sehr gut. Wir betrachten noch die Reduktionen der Richtungen:

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6\, r^2}(x_2 - x_1)\,(2\, y_1 + y_2) = \frac{\varrho}{2\, r^2}(x_2 - x_1)\, y' \text{ mit } y' = \frac{2\, y_1 + y_2}{3}$$

$$T_2 - t_2 = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad = \frac{\varrho}{2 r^2}(x_1 - x_2)\, y'' \text{ mit } y'' = \frac{y_1 + 2\, y_2}{3}$$

Hier kann man auch die y', y'' geradezu mit dem Zirkel abnehmen, sowie die $x_2 - x_1$, wenn man dieselben nicht ohnehin schon in der Rechnung stehen hat, und da $\frac{\varrho}{2\, r^2} = \frac{1}{395}$ für Kilometer, so kann man glatt mit dem Rechenschieber rechnen:

$$T_1 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{395}\, y' \text{ und } T_2 - t_2 = \frac{x_1 - x_2}{395}\, y''$$

z. B. S. 287 Donnersberg

$x_2 - x_1 = -\,33{,}8^{km}\; y' = -\,34{,}6^{km}$

$T_1 - t_1 = +\,2{,}96''$

Calmit

$x_1 - x_2 = +\,33{,}8^{km}\; y'' = -\,31{,}0^{km}$

$T_2 - t_2 = -\,2{,}66''$

§ 52. Vergleichung der kongruenten und der konformen Coordinaten.

Das im vorigen § 51. behandelte System der rechtwinkligen konformen Coordinaten x, y hat die Eigenschaft, dass es von einem Teil der Kugeloberfläche eine ebene Darstellung bietet, welche dem Urbilde in den kleinsten Teilen ähnlich ist.

Diese Eigenschaft, welcher Gauss die Benennung „konforme" Abbildung gegeben hat, wollen wir durch Vergleichung der Verzerrungsformeln für das Soldnersche und für das Gausssche System näher untersuchen. Wir nennen dabei die Soldnerschen Coordinaten *kongruente* Coordinaten, weil die Ordinaten y ebenso wie die Abscissen x in geodätischem Sinne kongruent abgebildet werden, d. h. ein Landmesser, welcher längs einer abgesteckten Ordinate y mässe, ohne zu wissen, dass er sich auf einer *krummen* Fläche befindet, und dann seine Messung in einer Zeichnungsebene auftrüge, würde für y eine Gerade erhalten, welche dem Bogen y auf der Kugel an linearer Ausdehnung gleich ist.