Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 52. Vergleichung der kongrnenten und der konformen Coordinaten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Danach ist folgendes berechnet:

$\log m =$	10·0	20·0	30·0	40·0	50·0	60·0	70·0	80·0	90·0	100·0
$y =$	$13{,}7^{km}$	19,4	23,7	27,4	30,6	33,5	36,2	38,7	41,1	$43{,}3^{km}$

Hiernach sind die Parallelen in Fig. 1. gezeichnet; man kann daraus z. B. abnehmen (S. 287):

Donnersberg	Mitte	Calmit
78	57	40

$$\log s - \log S = \frac{78 + 4 \cdot 57 + 40}{6} = \frac{78 + 228 + 40}{6} = \frac{346}{6}$$

$$\log s - \log S = 57 \cdot 7$$

Dieses soll dasselbe sein wie das frühere 57·8 in (3).

In dem kleinen Netzbilde von Fig. 1. ist die graphische Interpolation für $\log m$ wohl nicht völlig genügend, aber jedenfalls zur Kontrolle der Rechnung nützlich; hat man Netze II. und III. Ordnung entfernt von der Hauptaxe, wo die $\log m$ grösser und die Parallelen mehr gleichabständig werden, so wird das Verfahren sehr gut.

Wir betrachten noch die Reduktionen der Richtungen:

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6\,r^2}(x_2 - x_1)(2\,y_1 + y_2) = \frac{\varrho}{2\,r^2}(x_2 - x_1)\,y' \text{ mit } y' = \frac{2\,y_1 + y_2}{3}$$

$$T_2 - t_2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{\varrho}{2\,r^2}(x_1 - x_2)\,y'' \text{ mit } y'' = \frac{y_1 + 2\,y_2}{3}$$

Hier kann man auch die y', y'' geradezu mit dem Zirkel abnehmen, sowie die $x_2 - x_1$, wenn man dieselben nicht ohnehin schon in der Rechnung stehen hat, und da $\frac{\varrho}{2\,r^2} = \frac{1}{395}$ für Kilometer, so kann man glatt mit dem Rechenschieber rechnen:

$$T_1 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{395}\,y' \text{ und } T_2 - t_2 = \frac{x_1 - x_2}{395}\,y''$$

z. B. S. 287 Donnersberg Calmit

$x_2 - x_1 = -\,33{,}8^{km}\; y' = -\,34{,}6^{km}$ $\quad$ $x_1 - x_2 = +\,33{,}8^{km}\; y'' = -\,31{,}0^{km}$

$T_1 - t_1 = +\,2{,}96''$ $\quad$ $T_2 - t_2 = -\,2{,}66''$

§ 52. Vergleichung der kongruenten und der konformen Coordinaten.

Das im vorigen § 51. behandelte System der rechtwinkligen konformen Coordinaten x, y hat die Eigenschaft, dass es von einem Teil der Kugeloberfläche eine ebene Darstellung bietet, welche dem Urbilde in den kleinsten Teilen ähnlich ist.

Diese Eigenschaft, welcher Gauss die Benennung „konforme“ Abbildung gegeben hat, wollen wir durch Vergleichung der Verzerrungsformeln für das Soldnersche und für das Gausssche System näher untersuchen. Wir nennen dabei die Soldnerschen Coordinaten *kongruente* Coordinaten, weil die Ordinaten y ebenso wie die Abscissen x in geodätischem Sinne kongruent abgebildet werden, d. h. ein Landmesser, welcher längs einer abgesteckten Ordinate y mässe, ohne zu wissen, dass er sich auf einer *krummen* Fläche befindet, und dann seine Messung in einer Zeichnungsebene auftrüge, würde für y eine Gerade erhalten, welche dem Bogen y auf der Kugel an linearer Ausdehnung gleich ist.

Zuerst betrachten wir die beiden Formeln für die lineare Projektionsverzerrung, nämlich (10) § 48. S. 271 und (12) § 50. S. 282, und indem wir beidemal die Bezeichnungen der Landesaufnahme anwenden, nämlich S für die wahre (sphärische) Entfernung und s für die Projektions-Entfernung, haben wir zur Vergleichung:

$$\text{Soldner, kongruent} \quad \frac{s}{S} = 1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6\,r^2} \cos^2 t \tag{1}$$

$$\text{Gauss, konform} \quad \frac{s}{S} = 1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6\,r^2} \tag{2}$$

Lässt man die y alle einander gleich werden, so bekommt man daraus wieder das Vergrösserungsverhältnis in differentialem Sinne:

$$\text{kongruent} \quad m_1 = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \cos^2 t \tag{3}$$

$$\text{konform} \quad m_2 = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \tag{4}$$

Von diesen beiden Werten ist m_2 in einem Punkte nach allen Richtungen hin konstant, dagegen m_1 veränderlich zwischen den äussersten Werten $1 + \frac{y^2}{2\,r^2}$ und 1, deren Zwischenwert $= 1 + \frac{y^2}{4\,r^2}$ ist; und dieser Zwischenwert ist auch gleich dem durch Integration zu findenden Mittelwert, weil $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\, d\,t = \pi$.

Man kann auch leicht die Flächen vergleichen: Ein Streifen $\varDelta\, x\, d\, y$ im Urbild wird abgebildet werden:

$$\text{kongruent} \quad d\,F_1 = \varDelta\, x \left(1 + \frac{y^2}{2\,r^2}\right) d\,y$$

$$\text{konform} \quad d\,F_2 = \varDelta\, x \left(1 + \frac{y^2}{2\,r^2}\right) d\,y \left(1 + \frac{y^2}{2\,r^2}\right) = \varDelta\, x \left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right) d\,y$$

Als Integral zwischen den Grenzen 0 und y giebt dieses, wenn $y\, \varDelta\, x = F$ gesetzt wird:

$$\text{kongruent} \quad F_1 = F\left(1 + \frac{y^2}{6\,r^2}\right)$$

$$\text{konform} \quad F_2 = F\left(1 + \frac{y^2}{3\,r^2}\right)$$

und das Verhältnis beider:

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \tag{5}$$

Einige Zahlenwerte von $\frac{y^2}{2\,r^2}$ haben wir bereits in (8) § 49. S. 276 ausgerechnet, man sieht daraus, dass z. B. für $y = 30\,000^m$ die lineare Verzerrung $\frac{y^2}{2\,r^2} = 0{,}0000\,11$ oder 11 Milliontel oder 11^{mm} auf 1^{km} ist, und dass auch die konforme Flächenverzerrung um 11 Milliontel grösser ist als die kongruente Flächenverzerrung.

Man kann in diesen Betrachtungen auch noch weiter gehen, und so habe ich in der „Zeitschr. f. Verm. 1875“, S. 27—34 eine theoretische Betrachtung angestellt über die *Quadrat*summen der linearen Projektions-Verzerrungen in beiden Fällen, und gefunden, dass die konforme Projektion eine solche Quadratsumme Ω giebt, welche bei konstantem Grenzwert Y sich zu der entsprechenden Quadratsumme ω der kongruenten Projektion verhält $\Omega : \omega = 8 : 3$, und dass für $\Omega = \omega$ die Grenzordinate Y des konformen Systems sich zu der entsprechenden Grenzordinate y des kongruenten Systems verhält $Y : y = 0{,}82 : 1$; und hiernach dürfte die konforme Projektion nur auf 82 % der Fläche ausgedehnt werden, welche der kongruenten (Soldnerschen) Projektion zugänglich ist.

Alle Messungsfehler sind hiebei gleich Null gesetzt.

Diese Verzerrungs-Vergleichungen Ω und ω, welche von der „Zeitschr. f. Verm. 1875", S. 27—34 auch noch in unserem „Handbuch d. Verm., 2. Aufl. 1878", S. 276 bis 278 abgedruckt waren, haben wir vor kurzem in der „Zeitschr. f. Verm. 1896", S. 249 einer neuen Bearbeitung unterzogen, auf welche wir zurückkommen werden.

Solche Integrationen für die linearen Verzerrungselemente in verschiedenen Formen, z. B. auch nach den neueren Theorieen von Tissot 1881 (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1896", S. 210—213) geben aber ein *ein*seitiges theoretisches Kriterium, welches in der Praxis nicht Stand hält, und namentlich für Landesvermessungen mit Triangulierungen zu vollständigen Fehlschlüssen führt.

Die Theorie jener Ω und ω erscheint sofort in ganz anderem Lichte, wenn man auch die bisher gleich Null gesetzten Messungsfehler zuzieht, d. h. wenn man von der Theorie zur Praxis übergeht.

Z. B. in Preussen wurde festgesetzt, dass die linearen Fehler, die durch die Benützung der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten als ebene Coordinaten entstehen, nicht grösser als $\frac{1}{20\,000}$ oder 5^{cm} auf 1^{km} sein sollen (F. G. Gauss, „die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, 1. Aufl. 1876", S. 299 und „Zeitschr. f. Verm. 1896", S. 196 und 200) und schon damit wird jener Theorie der Ω und ω u. s. w. der praktische Boden entzogen, denn jene Fehler werden bei Einhaltung der Grenze $y = 64^{km}$ nicht grösser als 5^{cm} auf 1^{km}, mag man die Benützung in der Ebene nach Soldner kongruent oder nach Gauss konform machen.

Die Flächenprojektionsfehler sind verschwindend klein im Vergleiche mit den Fehlern, welche beim wirklichen Feldmessen mit Messlatten, Winkelspiegel u. s. w. entstehen; und *grössere* Flächen, welche polygonometrisch an das System angeschlossen werden, nehmen von den Projektionsverzerrungsfehlern den unschädlichen Anteil in sich auf.

Der lineare Projektionsfehler von 0,005 % oder 5^{cm} auf 1000^{m} oder $0{,}05^{mm}$ auf 1^{m} oder auch $0{,}25^{mm}$ auf 5^{m}, kann auch verglichen werden mit dem metronomisch zulässigen Fehler von $1{,}6^{mm}$ an einer hölzernen Messlatte, welcher immer noch das Sechsfache des Projektionsfehlers ist.

Die oben berichtete Theorie der $\Omega : \omega$ hat ein rein *lineares* Messungsverfahren vorausgesetzt:

Wenn man in jedem Punkt nach allen Richtungen kleine Linien gezogen und dadurch die ganze Aufnahme bewirkt denkt ... d. h. es ist ein spekulatives Messungsverfahren vorausgesetzt, welches es praktisch nicht giebt. Der Schwerpunkt unserer modernen Vermessungen liegt nicht in den linearen Messungen, sondern in den *Winkel-*

messungen, von denen wir nachher (bei den Gleichungen (6) und (7) unten zu handeln haben werden).

Es ist auch der Gedanke ausgesprochen worden, bei konformen Coordinaten, mit grossen Gebieten, z. B. mit Ordinaten y, die grösser als $70\,000^m$ sind, für alle weiter von der Coordinatenaxe abliegenden Gemarkungen besondere Reduktionen der Strecken oder Flächenangaben einzuführen.

Wenn die Projektions-Verzerrungsfehler praktisch zu gross werden, so müsste man nicht bloss bei *konformen* Coordinaten besondere Reduktionen der Strecken und der Flächen einführen, sondern bei den Soldnerschen Coordinaten wäre das noch viel mehr nötig — ja man müsste im Soldnerschen System nicht bloss gemarkungsweise Reduktionen anbringen, sondern, wie ein Kollege sich ausdrückte, man müsste eine ganze *Windrose* von Massstäben anbringen, nach jeder Richtung einen besonderen.

Wenn man ausnahmsweise mit den Verzerrungsfehlern an die Messungsfehler herankommt, was bei feinen Stadtvermessungen oder auch z. B. in Bayern wegen der grossen Ordinaten eintreten kann, dann bringt die Soldnersche ungleiche Verzerrung ganz ungeheuerliche Widerwärtigkeiten, welche zu ersehen sind aus der „Instruktion für neue Katastermessungen in Bayern," 1885 § 23. und noch deutlicher in technische Anleitung etc. Dr. J. H. Franke, München 1889, S. 121. Alles was dort im Interesse der Rechnungserleichterung etc. gesagt ist, wird mit einem Schlage überflüssig, wenn die Projektion konform ist.

Der Schwerpunkt unserer modernen Vermessungen liegt nicht in den linearen Messungen, sondern in den *Winkel*messungen, und während für erstere der Satz gilt „Es ist darnach zu trachten, die vernachlässigten Grössen möglichst klein zu machen, nicht aber nach allen Richtungen möglichst gleich —", gilt für Triangulierungen gerade das Gegenteil, hier ist darnach zu trachten, die Verzerrungen nach allen Richtungen möglichst gleich zu machen, damit die Dreiecke ähnlich bleiben. In der Triangulierung III. Ordnung gestattet die konforme Projektion auf viel weitere Gebiete ohne alle sphärische Korrektionen von der Ordnung $1 : r^2$ auszudehnen, als die Soldnersche, weil die schlimmsten Glieder der Soldnerschen Methode bei der konformen Projektion fortfallen.

Um dieses zu zeigen, machen wir die Vergleichung der Richtungsreduktionen, nämlich nach (20)—(21) § 48. S. 272 und (31) § 50. S. 284 beidemal mit den Bezeichnungen der Landesaufnahme, T für sphärischen und t für ebenen Richtungswinkel:

Soldner, kongr. $$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6\,r^2}(x_2 - x_1)(2\,y_1 + y_2) + \frac{\varrho}{6\,r^2} \sin t_1 \cos t_1 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \qquad (6)$$

Gauss, konform $$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6\,r^2}(x_2 - x_1)(2\,y_1 + y_2) \qquad (7)$$

Das schlimmste Glied $\frac{x_2 - x_1}{6\,r^2\,s^2}(y_2^3 - y_1^3)$ von Soldner fällt bei Gauss rundweg fort. Wir wollen dieses Glied noch besonders betrachten:

$$\varrho \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{6\,r^2\,s^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) = \varrho \frac{\sin t \cos t}{6\,r^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

Bei einer Kleintriangulierung entfernt von der Hauptaxe sind die $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ verhältnismässig klein gegen die y selbst, sie gelten als von nächst kleinerer Ordnung, und damit haben wir den wichtigen Satz:

Die trigonometrischen Verzerrungsfehler der Gauss schen Kleintriangulierung entfernt von der Axe sind nur von nächst kleinerer Ordnung als bei der schwerfälligen Soldner schen Triangulierung.

Zu näherer Ausführung wollen wir die sämtlichen $y_1 y_2 \ldots$ kurz mit y und die $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ mit dx und dy bezeichnen, dann wird:

Soldner, kongruent | Gauss, konform

$$T - t = \varrho \frac{y}{2r^2}(dx + y \sin t \cos t) \qquad T - t = \varrho \frac{y\,dx}{2r^2} \tag{8}$$

Setzt man in runden Zahlen für Triangulierung III. Ordnung $dx = 5000^m$, dagegen y als sehr gross $= 100\,000^m$ und $t = 45°$, so wird:

Soldner, kongruent | Gauss, konform

$$T - t = 1{,}3'' + 12{,}7'' = 14{,}0'' \qquad T - t = 1{,}3''$$

also bei Gauss rund 1″, was in III. Ordnung leicht zu verschmerzen ist, aber bei Soldner 14″.

Das ist die Richtungsverzerrung. Die lineare Verzerrung giebt bei Soldner in diesem Fall ein Schwanken im Logarithmus zwischen 0.00005 und 0.00000, d. h. Unmöglichkeit auch nur mit 5 stelligen Logarithmen glatt eben zu rechnen, während bei Gauss das lineare Element als Mittelwert bereits in den Anschluss-Coordinaten II. Ordnung steckt und dem Rechner in III. Ordnung gar nicht mehr zu Gesicht kommt.

Hiebei ist auch die Höhenreduktion in Vergleichung zu ziehen, welche wir früher bei der Basismessung in § 9. S. 67 erwähnt haben. Wenn in der Höhe h über dem Meere eine Strecke s unmittelbar, z. B. mit Messlatten, gemessen ist, so kann sie nicht unmittelbar mit einer Triangulierungsseite verglichen werden, sondern sie muss auf den Meereshorizont reduziert werden $s\left(1 - \frac{h}{r}\right)$. Die Reduktion $\frac{sh}{r}$ hat nach S. 67 für $h = 100^m$ den Betrag $15{,}7^{mm}$ auf 1000^m oder 15,7 Milliontel.

Diese Höhenreduktion wirkt der Netzverzerrung günstig entgegen, denn eine Strecke s geht infolge der Höhenreduktion und der Netzreduktion über in:

$$s\left(1 - \frac{h}{r} + \frac{y^2}{2r^2}\right)$$

Eine Übersichtstafel dazu haben wir auf Seite [45] des Anhangs berechnet. Man entnimmt daraus z. B., dass bei 400^m Höhe und Ordinaten $y = 70^{km}$ die Gesamtreduktion allgemein nahezu gleich Null ist, wenn die Projektion konform ist, dagegen schwankend zwischen Null und 6^{cm} auf 1^{km}, wenn die Projektion kongruent (nach Soldner) ist. (Auch dieses wollen wir später noch näher behandeln.)

Für die Höhenreduktion haben wir bisher vorausgesetzt, dass die Triangulierung selbst mit ihrer Basis auf den Meereshorizont reduziert sei, was die Regel ist. Es giebt aber auch Ausnahmen, z. B. in Württemberg ist der Triangulierungshorizont 844 Pariser Fuss $= 274{,}16^m$ über dem Meere, was eine logarithmische Reduktion 186·6 oder 43^{mm} auf 1^{km} bringt, welche zwar der Soldner schen Netzreduktion $\frac{y^2}{2r^2}\cos^2 t$ entgegen wirkt, aber nicht nach allen Richtungen wirksam, weil die Projektion nicht konform ist.

Eine Gesamtreduktion ist auch in Mecklenburg eingeführt. Die Netzreduktion ist dort $1+\frac{x^2}{2r^2}$, weil die Hauptaxe nicht meridional, sondern westöstlich liegt. Der Maximalwert $1+\frac{x^2}{2r^2}$ ist logarithmisch $= 357{\cdot}0$, und deswegen wurde eine Gesamtreduktion $= 178{\cdot}5$ eingeführt, oder $= 41{,}1^{mm}$ für 1^{km}, welche einer Höhenreduktion für $h = 262{,}4^m$ gleichkommt, d. h. die Mecklenburgische Triangulierungsergebnisse sind mit einer solchen Gesamtmassstabs-Veränderung versehen, als ob der Horizont der Basis und die Triangulierung im Ganzen $262{,}4^m$ über dem Meere wäre.

Dadurch wurde erreicht, dass die Gesamt-Netzreduktion in dem ganzen Bereiche von rund 80^{km} südlich und 80^{km} nördlich von dem Normalparallel nur zwischen den Grenzen von rund $+4^{cm}$ auf 1^{km} und -4^{cm} auf 1^{km} sich bewegt, während sie sonst auf 8^{cm} für 1^{km} gestiegen wäre.

Nach all diesem ist an den grossen Vorteilen der Konformität für Triangulierung und Katastervermessungen nicht zu zweifeln.

Mit Zurückgreifen auf 1875 haben wir daher zwei Sätze:

I. Satz 1875. Wenn man eine Landesvermessung durch unendlich viele kleine Streckenmessungen machen würde und dabei auch alle Messungsfehler, selbst = Null setzte und wenn man die Quadratsumme aller Strecken-Verzerrungs-Fehler als einziges Kriterium annähme, so *würde* die Soldner sche Projektion mit etwa ein Fünftel der Fläche im Vorteil sein.

II. Satz 1896. Wenn man eine Landesvermessung nach moderner Art mit Triangulierung und Polygonzügen macht, so ist die konforme Projektion unbedingt weit im Vorteil: man kann dann mit dem Messungsgebiet so weit gehen (ohne andere Rücksichten und alles in III. Ordnung als eben behandeln) als es die praktischen Erwägungen der linearen Fehler gestatten, d. h. wenn man in letzterer Hinsicht den preussischen Bestimmungen folgen will, bis zu einer Ordinatenlänge $y =$ rund 100^{km}.

Zum Schlusse wollen wir noch die beiden Triangulierungs-Abrisse von § 47. S. 265 und § 51. S. 289 in dem Sinn vergleichen, dass wir die Mittelwerte der Richtungs-Reduktionen und der logarithmischen Seiten-Reduktionen bilden. Dieses giebt:

		durchschnittliche Richtungs-Reduktion	durchschnittliche logarithmische Seiten-Reduktion
kongruent	S. 265	$\pm 0{,}70''$	$\pm 7{\cdot}5$
konform	S. 289	$\pm 0{,}64$	$\pm 13{\cdot}6$

In der kongruenten Projektion sind die linearen Reduktionen im Vorteil und in der konformen Projektion sind die Richtungen im Vorteil; d. h. was wir allgemein erkannt haben, zeigt sich auch in den Zahlenbeispielen bestätigt. Doch ist der vorliegende Fall des Netzes Fig. 1. S. 287 zum Veranschaulichen der Vorteile der Konformität wenig geeignet, weil die Axe durch das Netz selbst hindurch geht und keine grossen Ordinaten vorkommen.

Wir wollen auch noch einen Blick auf das Hannover sche Stadttriangulierungsnetz III. Ordnung werfen, welches in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 204 in konformen Coordinaten der Landesaufnahme und S. 207 in kongruenten Kataster-Coordinaten berechnet ist. Obgleich die konformen Ordinaten im Mittel $y = 245000^m$

und die kongruenten Ordinaten nur $y = 23000^m$ lang sind, war doch die konforme Berechnung bequemer als die Soldnersche kongruente, weil bei ersterer die Reduktionen sich viel bequemer in Richtungs-Reduktionen und Entfernungs-Reduktionen trennen, von denen ausserdem die letzteren sich leicht tabellarisch erledigen lassen. (Vgl. die Hilfstafel für $log \frac{\mu}{2 A^2} y^2$ auf S. [46] des Anhangs.)

Noch in anderem Sinne wollen wir die beiden Stadtnetz-Triangulierungs-Coordinaten vergleichen: In dem vorgeschriebenen Kataster-System Celle ist im Mittel $y = 23000^m$ und dazu nehmen wir im Mittel $x_2 - x_1 = 3000^m = d\,x$, und damit rechnen wir nach der Formel (8):

$$\begin{array}{ll} \text{kongruent} & T - t = 0{,}17'' + 0{,}67 = 0{,}84'' \\ \text{konform} & T - t = \quad . \; . \; . \; . \; . \; 0{,}17'' \end{array}$$

Die konforme Reduktion 0,17″ ist gerade an der Grenze der Vernachlässigkeitszulassung für das grundlegende Netz einer feinen Stadtvermessung, während 0,84″ schon zu gross ist. Wegen dieser Beträge von 0,84″ etc. haben wir uns damals entschlossen, die auf 0,1″ ausgeglichene Triangulierung noch in den 6 Hauptpunkten sphärisch zu rechnen; mit 0,17″ hätten wir das wohl auch schon ersparen können.

Alle diese Vergleichungen gestatten bereits ein Urteil zu fällen, das zu Gunsten der konformen Projektion, und zu Ungunsten der kongruenten Soldnerschen Projektion sich stellen wird; wir werden jedoch in einem späteren Kapitel nochmals auf diese Sache zurückkommen.

§ 53. Sphärische geographische Coordinaten φ, λ und rechtwinklige Coordinaten x, y.

Die geographischen Breiten und Längen φ und λ lediglich auf die Erde als Kugel bezogen, haben wenig praktischen Wert, denn die Abplattung der Erde ist bei diesen Coordinaten viel einflussreicher als bei den rechtwinkligen Coordinaten x, y.

Trotzdem haben wir die Aufgabe, φ und λ aus x und y zu berechnen, und nachher umgekehrt, hier in dem Kapitel über *sphärische* Coordinaten mit aufgenommen, weil es möglich sein wird, durch kleine Kunstgriffe den Übergang von der Kugel zum Ellipsoid noch soweit klar zu machen (in dem nachfolgenden § 54.), als zum ersten Verständnis unserer heutigen Landesvermessungen und Katastervermessungen und zur Einsicht in die Feld- und Landmesser-Anweisungen der deutschen Staaten nötig ist.

Die verschiedenen Beziehungen zwischen geographischen Coordinaten φ, λ und rechtwinkligen Coordinaten x, y werden wir in zwei Aufgaben darstellen, und zwar zuerst:

I. Gegeben x und y. Gesucht φ und λ.

Nach Fig. 1. und Fig. 2. S. 298 nehmen wir folgende Aufgabe:

Gegeben ist die Breite φ_0 eines angenommenen Coordinaten-Ursprungs O und dazu die rechtwinkligen Coordinaten x, y eines Punktes P.

Gesucht ist die Breite φ_2 des Punktes P, der Längen-Unterschied λ zwischen O und P und die Meridian-Konvergenz γ für P und P_1.

Die Abscissen x sollen nach Norden positiv, die Ordinaten y nach Osten positiv, und die Längen λ ebenfalls nach Osten positiv gezählt werden.