

## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 53. Sphärische geographische Coordinaten  $\phi$ ,  $\lambda$  und rechtwinklige  
Coordinaten  $x$ ,  $y$ .

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

und die kongruenten Ordinaten nur  $y = 23000^m$  lang sind, war doch die konforme Berechnung bequemer als die Soldner sche kongruente, weil bei ersterer die Reduktionen sich viel bequemer in Richtungs-Reduktionen und Entfernung-Reduktionen trennen, von denen außerdem die letzteren sich leicht tabellarisch erledigen lassen. (Vgl. die Hilfstafel für  $\log \frac{\mu}{2 A^2} y^2$  auf S. [46] des Anhangs.)

Noch in anderem Sinne wollen wir die beiden Stadtnetz-Triangulierungs-Coordinaten vergleichen: In dem vorgeschriebenen Kataster-System Celle ist im Mittel  $y = 23000^m$  und dazu nehmen wir im Mittel  $x_2 - x_1 = 3000^m = dx$ , und damit rechnen wir nach der Formel (8):

$$\begin{array}{ll} \text{kongruent} & T - t = 0,17'' + 0,67 = 0,84'' \\ \text{konform} & T - t = \dots \dots \dots 0,17'' \end{array}$$

Die konforme Reduktion  $0,17''$  ist gerade an der Grenze der Vernachlässigungszulassung für das grundlegende Netz einer feinen Stadtvermessung, während  $0,84''$  schon zu gross ist. Wegen dieser Beträge von  $0,84''$  etc. haben wir uns damals entschlossen, die auf  $0,1''$  ausgeglichenen Triangulierung noch in den 6 Hauptpunkten sphärisch zu rechnen; mit  $0,17''$  hätten wir das wohl auch schon ersparen können.

Alle diese Vergleichungen gestatten bereits ein Urteil zu fällen, das zu Gunsten der konformen Projektion, und zu Ungunsten der kongruenten Soldner schen Projektion sich stellen wird; wir werden jedoch in einem späteren Kapitel nochmals auf diese Sache zurückkommen.

### § 53. Sphärische geographische Coordinaten $\varphi, \lambda$ und rechtwinklige Coordinaten $x, y$ .

Die geographischen Breiten und Längen  $\varphi$  und  $\lambda$  lediglich auf die Erde als Kugel bezogen, haben wenig praktischen Wert, denn die Abplattung der Erde ist bei diesen Coordinaten viel einflussreicher als bei den rechtwinkligen Coordinaten  $x, y$ .

Trotzdem haben wir die Aufgabe,  $\varphi$  und  $\lambda$  aus  $x$  und  $y$  zu berechnen, und nachher umgekehrt, hier in dem Kapitel über *sphärische* Coordinaten mit aufgenommen, weil es möglich sein wird, durch kleine Kunstgriffe den Übergang von der Kugel zum Ellipsoid noch soweit klar zu machen (in dem nachfolgenden § 54.), als zum ersten Verständnis unserer heutigen Landesvermessungen und Katastervermessungen und zur Einsicht in die Feld- und Landmesser-Anweisungen der deutschen Staaten nötig ist.

Die verschiedenen Beziehungen zwischen geographischen Coordinaten  $\varphi, \lambda$  und rechtwinkligen Coordinaten  $x, y$  werden wir in zwei Aufgaben darstellen, und zwar zuerst:

#### 1. Gegeben $x$ und $y$ . Gesucht $\varphi$ und $\lambda$ .

Nach Fig. 1. und Fig. 2. S. 298 nehmen wir folgende Aufgabe:

Gegeben ist die Breite  $\varphi_0$  eines angenommenen Coordinaten-Ursprungs  $O$  und dazu die rechtwinkligen Coordinaten  $x, y$  eines Punktes  $P$ .

Gesucht ist die Breite  $\varphi_2$  des Punktes  $P$ , der Längen-Unterschied  $\lambda$  zwischen  $O$  und  $P$  und die Meridian-Konvergenz  $\gamma$  für  $P$  und  $P_1$ .

Die Abscissen  $x$  sollen nach Norden positiv, die Ordinaten  $y$  nach Osten positiv, und die Längen  $\lambda$  ebenfalls nach Osten positiv gezählt werden.

Aus Fig. 1. entnehmen wir sofort die Beziehung zwischen der Ursprungsbreite  $\varphi_0$ , der Fußpunktsbreite  $\varphi_1$  und der Abscisse  $x$ , nämlich:

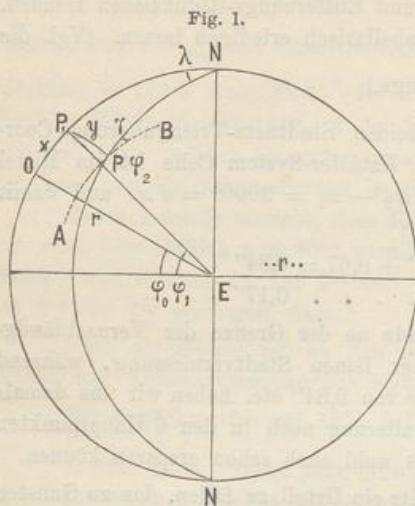
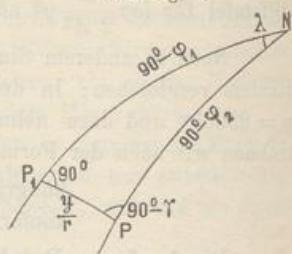


Fig. 2.  
Rechtwinkliges Dreieck  $NP_1P$   
von Fig. 1.



$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{x}{r} \text{ bzw. } = \frac{x}{r} \varrho \quad (1)$$

Alles weitere wird durch das rechtwinklige sphärische Dreieck  $NP_1P$  geliefert, weshalb wir dieses Dreieck in Fig. 2. nochmals besonders herausgezeichnet haben. Dieses Dreieck gibt zuerst die Cosinus-Gleichung:

$$\cos(90^\circ - \varphi_2) = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cos \frac{y}{r}$$

oder ohne  $90^\circ$ :

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right)$$

umgekehrt:

$$\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = \frac{y^2}{2r^2} \sin \varphi_1$$

Nun ist aber in erster Näherung (z. B. nach S. 179):

$$\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_2) \cos \varphi_1$$

also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y^2}{2r^2} \tan \varphi_1 \quad (2)$$

Zweitens gibt das rechtwinklige Dreieck Fig. 2. zur Bestimmung von  $\lambda$ :

$$\tan \lambda = \frac{\tan \frac{y}{r}}{\sin(90^\circ - \varphi_1)} = \frac{\tan \frac{y}{r}}{\cos \varphi_1} = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left( \frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} \right)$$

Die arc tang-Reihe, S. 172, gibt:

$$\lambda = \text{arc tang } \lambda = \tan \lambda - \frac{(\tan \lambda)^3}{3}$$

$$\lambda = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left( \frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} \right) - \frac{y^3}{3r^3 \cos^3 \varphi_1}$$

Wenn man die Glieder mit  $y^3$  zusammenordnet, so bekommt man:

$$\lambda = \frac{y}{r \cos \varphi_1} - \frac{y^3}{3r^3} \frac{\tan^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1} \quad (3)$$

Drittens giebt das rechtwinklige Dreieck Fig. 2. zur Bestimmung von  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \tan(90^\circ - \gamma) &= \frac{\tan(90^\circ - \varphi_1)}{\sin \frac{y}{r}} \quad \text{oder} \quad \tan \gamma = \sin \frac{y}{r} \tan \varphi_1 \\ \tan \gamma &= \left( \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right) \tan \varphi_1 \\ \gamma &= \left( \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right) \tan \varphi_1 - \frac{y^3}{3r^3} \tan^3 \varphi_1 \\ \gamma &= \frac{y}{r} \tan \varphi_1 - \frac{y^3}{6r^3} \tan \varphi_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \end{aligned} \quad (4)$$

Durch diese Gleichungen (1) — (4) ist unsere Aufgabe gelöst, wir wollen aber noch zwei neue Gleichungen bilden, welche (3), (4) entsprechen, aber überall statt der Fußpunkts-Breite  $\varphi_1$  die Breite  $\varphi_2$  enthalten sollen. Zur Bestimmung von  $\lambda$  nimmt man dann:

$$\sin \lambda = \frac{\sin \frac{y}{r}}{\sin(90^\circ - \varphi_2)} = \frac{\sin \frac{y}{r}}{\cos \varphi_2} = \frac{1}{\cos \varphi_2} \left( \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right)$$

Die  $\arcsin$ -Reihe, S. 172, giebt:

$$\begin{aligned} \lambda &= \arcsin \lambda = \sin \lambda + \frac{(\sin \lambda)^3}{6} \\ \lambda &= \frac{1}{\cos \varphi_2} \left( \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right) + \frac{y^3}{6r^3 \cos^3 \varphi_2} \\ \lambda &= \frac{y}{r \cos \varphi_2} + \frac{y^3}{6r^3} \frac{\tan^2 \varphi_2}{\cos \varphi_2} \end{aligned} \quad (5)$$

Ferner zu einer zweiten Formel für  $\gamma$  aus Fig. 2.:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \gamma) &= \frac{\tan \frac{y}{r}}{\tan(90^\circ - \varphi_2)}, \quad \sin \gamma = \tan \frac{y}{r} \tan \varphi_2 \\ \sin \gamma &= \left( \frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} \right) \tan \varphi_2 \\ \gamma &= \left( \frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} \right) \tan \varphi_2 + \frac{y^3}{6r^3} \tan^3 \varphi_2 \\ \gamma &= \frac{y}{r} \tan \varphi_2 + \frac{y^3}{6r^3} \tan \varphi_2 (2 + \tan^2 \varphi_2) \end{aligned} \quad (6)$$

Mit diesen Formeln (1) — (6) haben wir den zu Anfang vorgesetzten Zweck erreicht, und zwar bei  $\lambda$  und  $\gamma$  sogar doppelt.

Ohne zwingenden Grund fürs folgende wollen wir auch noch für  $\lambda$  statt der beiden zweigliederigen Formeln (3) und (5) eine eingliederige Formel bilden, nämlich:

$$\lambda = \frac{y}{r} \sec \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} = \frac{y}{r} \sec \left( \varphi_2 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{3} \right) \quad (7)$$

Man kann diese bequeme Formel (7) leicht rückwärts begründen, indem man setzt:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} &= \varphi_1 - \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \cos \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} &= \cos \varphi_1 + \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \varphi_1 = \cos \varphi_1 \left( 1 + \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2) \tan \varphi_1 \right) \\ \sec \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} &= \frac{1}{\cos \varphi_1} \left( 1 - \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2) \tan \varphi_1 \right) \end{aligned}$$

Wegen (2) gibt dieses:

$$\sec \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{y^2}{r^2} \tan^2 \varphi_1 \right)$$

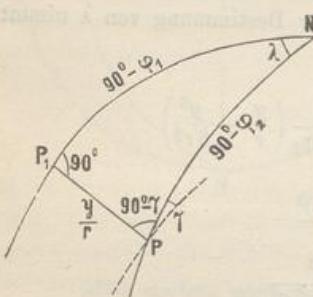
Dieses in (7) gesetzt, führt zurück auf (3), womit (7) bewiesen ist.

Man kann eine Umformung ähnlicher Art auch für die Meridian-Konvergenz machen, denn (4) oder (6) lässt sich auf diese Form bringen:

$$\gamma = \frac{y}{r} \sin \frac{2\varphi_1 + \varphi_2}{3} \sec \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} \quad (8)$$

II. Gegeben  $\varphi, \lambda$ . Gesucht  $x, y$ .

Fig. 1.



Die Umkehrung der vorigen Aufgabe heisst:

Gegeben sind die geographischen Coordinaten  $\varphi_2, \lambda$  eines Punktes  $P$ , und zwar die Länge  $\lambda$  bezogen auf den Meridian eines gegebenen Coordinaten-Systems, dessen Ursprungs-Breite  $\varphi_0$  ebenfalls gegeben ist.

Gesucht sind die rechtwinkligen Coordinaten  $x, y$  des Punktes  $P$ , und die Meridian-Konvergenz  $\gamma$ .

Auch diese Aufgabe lässt sich mittelst des rechtwinkligen Dreiecks, das wir in Fig. 1. wieder haben, leicht lösen.

Zur Bestimmung von  $\varphi_1 - \varphi_2$  hat man:

$$\cos \lambda = \frac{\tan(90^\circ - \varphi_1)}{\tan(90^\circ - \varphi_2)} = \frac{\tan \varphi_2}{\tan \varphi_1}$$

$$\left( 1 - \frac{\lambda^2}{2} \right) \tan \varphi_1 = \tan \varphi_2 \quad \text{oder} \quad \tan \varphi_1 - \tan \varphi_2 = \frac{\lambda^2}{2} \tan \varphi_1$$

Andererseits ist in erster Näherung

$$\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1}$$

also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \quad (9)$$

Bei den Entwicklungen für  $\lambda$  und  $\gamma$  kann man wieder wie im ersten Teil entweder alles auf  $\varphi_1$  oder auf  $\varphi_2$  beziehen, wir wollen die *beiden* Entwicklungen nebeneinander hersetzen, ohne Erläuterungen durch Worte, welche nach dem vorhergehenden nicht mehr nötig sein werden.

$$\tan \lambda = \frac{\tan \frac{y}{r}}{\cos \varphi_1} = \left( \lambda + \frac{\lambda^3}{3} \right) \cos \varphi_1$$

$$y = r \lambda \cos \varphi_1 + \frac{r \lambda^3}{3} \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1$$

$$\cos(90^\circ - \gamma) = \sin \lambda \cos(90^\circ - \varphi_1)$$

$$\sin \gamma = \left( \lambda - \frac{\lambda^3}{6} \right) \sin \varphi_1$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1$$

$$\sin \lambda = \frac{\sin \frac{y}{r}}{\cos \varphi_2} = \left( \lambda - \frac{\lambda^3}{6} \right) \cos \varphi_2$$

$$y = r \lambda \cos \varphi_2 - \frac{r \lambda^3}{6} \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 \quad (10)$$

$$\cos(90^\circ - \varphi_2) = \cot \lambda \cot(90^\circ - \gamma)$$

$$\tan \gamma = \tan \lambda \sin \varphi_2 = \left( \lambda + \frac{\lambda^3}{3} \right) \sin \varphi_2$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi_2 + \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi_2 \cos^2 \varphi_2 \quad (11)$$

Der Gang der Auflösung würde nun so sein, dass man zuerst nach (9) aus der gegebenen Breite  $\varphi_2$  die Fußpunkts-Breite  $\varphi_1$  ableitet, und daraus, durch die Differenz gegen die Ursprungs-Breite  $\varphi_0$ , die Abscisse  $x$  berechnet, nämlich:

$$x = (\varphi_1 - \varphi_0) r \quad \text{bezw.} \quad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varrho} r \quad (12)$$

Darauf hat man für  $y$  und  $\gamma$  je zwei Formeln, nämlich (10) für  $y$ , und (11) für  $\gamma$ , woraus man nach Umständen die eine oder andere auswählen kann, um  $y$  und  $\gamma$  zu berechnen. Oder man kann auch zur Probe Doppelrechnung anwenden.

Die Doppel-Formeln (10) und (11), welche zweigliedrig sind, kann man auch in je eine eingliedrige Formel überführen, in ähnlicher Weise wie dieses früher bei (7) und (8) gezeigt wurde. Man findet:

$$\text{Umwandlung von (10): } y = r \lambda \cos \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} \quad (13)$$

$$\text{, , , (11): } \gamma = \lambda \sin \frac{2\varphi_1 + \varphi_2}{3} \quad (14)$$

#### § 54. Übergang zum Ellipsoid.

Nachdem wir die rein *sphärischen* Beziehungen zwischen den geographischen Coordinaten und den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im vorigen § 53. kennen gelernt haben, müssen wir auch die *sphäroidischen* Beziehungen hiefür, wenigstens in erster Näherung herstellen.

Zuerst behandeln wir die Rektifikation des Meridian-Bogens  $x$  zwischen den Breiten  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$ , wofür in (1) § 53. S. 298 die Gleichung gefunden wurde:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = x \frac{\varrho}{r} \quad \text{oder} \quad x = (\varphi_1 - \varphi_0) \frac{r}{\varrho} \quad (1)$$

Wenn die Abscisse  $x$  nicht auf einem Kreisbogen vom Halbmesser  $r$ , sondern auf dem Bogen einer Meridian-Ellipse abgewickelt wird, so kann man doch, wenn  $x$  nicht sehr gross ist, die Rechnung mit einem Kreisbogen führen, dessen Halbmesser aber dann gleich dem Meridian-Krümmungshalbmesser  $M$  für die Mittelbreite  $\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$  zu nehmen ist, wie wir bereits in § 35. ausführlich gezeigt haben (nämlich bei (11) S. 210 und dann nochmals besonders bei (43) S. 218—219).

Wir haben dabei gefunden, dass der Fehler dieses Näherungs-Verfahrens in unseren Breiten nur etwa 5<sup>mm</sup> auf 1° beträgt (vgl. die Hilfstafel für  $g$ , S. 219), so dass namentlich bei den kleinen Geltungsbereichen, welche z. B. die 40 Preussischen Kataster-Coordinatensysteme haben, jenes Verfahren ganz zulässig und zugleich sehr bequem ist.

Ausserdem kann man auch eine Hilfstafel von der Art Seite [38] des Anhangs benützen, über welche auf S. 216 das Nötige gesagt wurde.

Dieses war rasch erledigt, etwas mehr Überlegung ist nötig, um für die Kugel, welche im vorigen § 53. mit dem unbestimmten Halbmesser  $r$  algebraisch eingeführt wurde, einen greifbaren Halbmesser in Zahlen zu finden.

In dieser Beziehung finden wir, dass die Übertragung auf das Ellipsoid wesentlich erleichtert wird durch den Umstand, dass der Ordinaten-Bogen  $y$ , weil er rechtwinklig zum Ursprungs-Meridian ist, mit seinen Endpunkten in nicht wesentlich ver-