Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 54. Übergang zum Ellipsoid

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Der Gang der Auflösung würde nun so sein, dass man zuerst nach (9) aus der gegebenen Breite φ_2 die Fusspunkts-Breite φ_1 ableitet, und daraus, durch die Differenz gegen die Ursprungs-Breite φ_0, die Abscisse x berechnet, nämlich:

$$x = (\varphi_1 - \varphi_0)\, r \quad \text{bezw.} \quad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varrho}\, r \tag{12}$$

Darauf hat man für y und γ je zwei Formeln, nämlich (10) für y, und (11) für γ, woraus man nach Umständen die eine oder andere auswählen kann, um y und γ zu berechnen. Oder man kann auch zur Probe Doppelrechnung anwenden.

Die Doppel-Formeln (10) und (11), welche zweigliederig sind, kann man auch in je *eine* eingliederige Formel überführen, in ähnlicher Weise wie dieses früher bei (7) und (8) gezeigt wurde. Man findet:

$$\text{Umwandlung von (10):} \quad y = r\,\lambda \cos \frac{\varphi_1 + 2\,\varphi_2}{3} \tag{13}$$

$$\text{„} \quad \text{„ (11):} \quad \gamma = \lambda \sin \frac{2\,\varphi_1 + \varphi_2}{3} \tag{14}$$

§ 54. Übergang zum Ellipsoid.

Nachdem wir die rein *sphärischen* Beziehungen zwischen den geographischen Coordinaten und den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im vorigen § 53. kennen gelernt haben, müssen wir auch die *sphäroidischen* Beziehungen hiefür, wenigstens in erster Näherung herstellen.

Zuerst behandeln wir die Rektifikation des Meridian-Bogens x zwischen den Breiten φ_0 und φ_1, wofür in (1) § 53. S. 298 die Gleichung gefunden wurde:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = x\,\frac{\varrho}{r} \quad \text{oder} \quad x = (\varphi_1 - \varphi_0)\,\frac{r}{\varrho} \tag{1}$$

Wenn die Abscisse x nicht auf einem Kreisbogen vom Halbmesser r, sondern auf dem Bogen einer Meridian-Ellipse abgewickelt wird, so kann man doch, wenn x nicht sehr gross ist, die Rechnung mit einem Kreisbogen führen, dessen Halbmesser aber dann gleich dem Meridian-Krümmungshalbmesser M für die Mittelbreite $\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$ zu nehmen ist, wie wir bereits in § 35. ausführlich gezeigt haben (nämlich bei (11) S. 210 und dann nochmals besonders bei (43) S. 218—219).

Wir haben dabei gefunden, dass der Fehler dieses Näherungs-Verfahrens in unseren Breiten nur etwa 5^{mm} auf 1° beträgt (vgl. die Hilfstafel für g, S. 219), so dass namentlich bei den kleinen Geltungsbereichen, welche z. B. die 40 Preussischen Kataster-Coordinatensysteme haben, jenes Verfahren ganz zulässig und zugleich sehr bequem ist.

Ausserdem kann man auch eine Hilfstafel von der Art Seite [38] des Anhangs benützen, über welche auf S. 216 das Nötige gesagt wurde.

Dieses war rasch erledigt, etwas mehr Überlegung ist nötig, um für die Kugel, welche im vorigen § 53. mit dem unbestimmten Halbmesser r algebraisch eingeführt wurde, einen greifbaren Halbmesser in Zahlen zu finden.

In dieser Beziehung finden wir, dass die Übertragung auf das Ellipsoid wesentlich erleichtert wird durch den Umstand, dass der Ordinaten-Bogen y, weil er rechtwinklig zum Ursprungs-Meridian ist, mit seinen Endpunkten in nicht wesentlich verschiedenen Breiten liegt, weshalb wir uns erlauben dürfen, die Ordinate y zu betrachten als liegend auf einem Kreisbogen, dessen Halbmesser der *Quer-Krümmungshalbmesser* N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 ist.

Wir machen also die Annahme

$$r = N_1 = \frac{c}{V_1} = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_1}} \tag{2}$$

gültig für die Fusspunkts-Breite φ_1. Die Formel für N_1 wurde früher in § 32. (22) S. 197 entwickelt und statt der Ausrechnung in Zahlen für den einzelnen Fall können wir uns kurzer Hand der Hilfstafel auf Seite [8]—[29] des Anhangs bedienen.

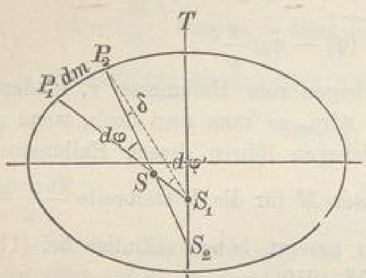
Diese Annahme reicht aus zur Berechnung von λ und γ aus gegebenen φ_1 und y oder umgekehrt, aber zur Berechnung von φ_2 oder φ, d. h. der Breite des Endpunktes einer Ordinate y müssen wir noch eine dritte Überlegung machen, zu welcher wir einen neuen Begriff einführen:

Der verkürzte Breiten-Unterschied.

Von allen Wirkungen der Elliptizität der Erdoberfläche ist die bedeutendste und niemals zu vernachlässigende, wenn überhaupt von der Elliptizität die Rede ist, die Abweichung zweier aufeinander folgender Normalen in einem Meridian, wodurch der kleine Winkel δ entsteht, der in der nachstehenden Fig. 1. eingezeichnet ist.

Wir werden diesen Winkel δ näher untersuchen.

Fig. 1.
$d\varphi' = d\varphi - \delta$.



In Fig. 1. seien $P_1 S_1$ und $P_2 S_2$ zwei Normalen einer Meridian-Ellipse, welche sich nicht in einem Punkte der Umdrehungsaxe sondern in einem anderen Punkte S schneiden, und zwar unter einem Winkel $d\varphi$, welcher gleich der Differenz der Breiten φ_1 und φ_2 beider Punkte P_1 und P_2 ist, d. h.:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi \tag{1}$$

Wenn ferner der Meridianbogen $P_1 P_2 = dm$ gesetzt wird, und der Meridian-Krümmungshalbmesser für die Mittelbreite $= M$ (d. h. nahezu $M = P_1 S = P_2 S$), so hat man für Differentialbetrachtung:

$$dm = M\, d\varphi \tag{2}$$

Andererseits kann man in erster Näherung auch setzen:

$$dm = N\, d\varphi' \quad (\text{wo } P_1 S_1 = N) \tag{3}$$

Es ist also das Verhältnis von (2) und (3):

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{N}{M} \tag{4}$$

und daraus ergiebt sich die Differenz:

$$\delta = d\varphi - d\varphi' = d\varphi\left(1 - \frac{d\varphi'}{d\varphi}\right) = d\varphi\left(1 - \frac{M}{N}\right) \text{ oder } = d\varphi\,\frac{M}{N}\left(\frac{N}{M} - 1\right) \tag{5}$$

Hiebei ist nach (25) § 32. S. 197:

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi \tag{6}$$

Da das Produkt $e'^2 \cos^2 \varphi$ sehr häufig vorkommt, bezeichnen wir es besonders, wie schon früher in (b) S. 208, indem wir setzen:

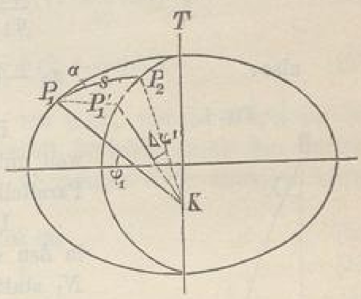
$$e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2 \quad , \quad \text{also } V^2 = 1 + \eta^2 \tag{7}$$

Damit wird nach (5):

$$\delta = \frac{d\,\varphi}{V^2}\,\eta^2 \tag{8}$$

Diese Formeln geben Veranlassung, eine neue Benennung einzuführen für den Winkel $d\,\varphi'$ von Fig. 1., welcher mit der Bezeichnung $\Delta\,\varphi'$ auch in Fig. 2. wiederkehrt.

Fig. 2.



Wenn allgemein $\Delta\,\varphi$ ein kleiner Breiten-Unterschied ist, so ist der entsprechende auf die Erdaxe reduzierte Wert $\Delta\,\varphi'$ nach (4) und (6):

$$\Delta\varphi' = \frac{\Delta\varphi}{V^2} = \textit{verkürzter Breiten-Unterschied} \tag{9}$$

Zu jedem gegebenen kleinen Breiten-Unterschied kann man den entsprechenden „verkürzten Breiten-Unterschied" $\Delta\,\varphi'$ mit Hilfe von V^2 nach unserer Hilfstafel Seite [8]—[29] des Anhanges leicht berechnen; es sei z. B.: $\varphi_1 = 49°\,30'$, $\varphi_2 = 50°\,30'$, also $\Delta\,\varphi = 1° = 3600''$ und die Mittelbreite $\varphi = 50°\,0'$, dann hat man:

$\log \Delta\,\varphi$	3.556 303	
von Seite [21]: $\log V^2$	0.001 204	
$\log \Delta\,\varphi'$	3.555 099	$\Delta\,\varphi' = 3590{,}04''$
		$\Delta\,\varphi' = 0°\,59'\,50{,}04''$

Der verkürzte Breiten-Unterschied dient dazu, um in erster Näherung sphäroidische Bögen auf einen Mittelpunkt in der Erdaxe zu reduzieren.

In Fig. 2. ist K ein solcher Mittelpunkt in der Erdaxe, aber *unter* dem Ellipsoidmittelpunkt gelegen. Hat man einen Bogen $P_1\,P_2 = s$, so kann man zuerst einen Centriwinkel σ berechnen:

$$\frac{s}{N} = \sigma \tag{10}$$

Dabei ist $N = P_1\,K$ der Quer-Krümmungs-Halbmesser des Ausgangspunktes P_1.

Diese Art der Reduzierung auf einen Zentralpunkt K ist, wie mehrfach betont, nur genähert, sie ist aber um so besser, je kleiner der Breiten-Unterschied ist, um den es sich dabei handelt. Deswegen ist das Verfahren genügend für unsere Aufgabe der Breitenbestimmung aus rechtwinkligen Coordinaten $x\,y$, denn hiebei steht der Ordinatenbogen y rechtwinklig auf dem Abscissen-Meridian x und deswegen werden die Fusspunktsbreite φ_1 von y und die Endbreite φ nicht sehr von einander verschieden sein.