Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 55. Sphäroidische Coordinaten φ, λ und x, y.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

§ 55. Sphäroidische Coordinaten φ, λ und x, y.

Um die sphärischen Formeln von § 53. mit Hilfe von § 54. auf das Ellipsoid zu übertragen, nehmen wir zuerst die Formel (2) S. 298 zur Hand, nämlich:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y^2}{2\,r^2}\, tang\, \varphi_1 \tag{1}$$

Zuerst ist für r der Quer-Krümmungs-Halbmesser N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 zu setzen, also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y}{2\,N_1^2}\, tang\, \varphi_1 \tag{2}$$

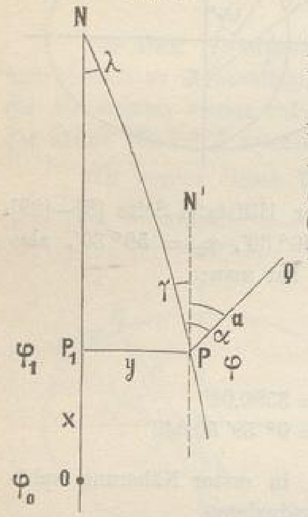
Diese Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ ist sphärisch berechnet, d. h. „*verkürzt*" in dem früher in § 54. erörterten Sinne; die wirkliche Breiten-Differenz $\varphi_1 - \varphi$ wird daher nach (4) § 54. S. 302:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{N}{M} = V^2 \tag{3}$$

also:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{V^2}{2}\,\frac{y^2}{N_1^2}\, tang\, \varphi_1 \tag{4}$$

Fig. 1.



Dabei wird V^2 als zur Breite φ_1 gehörig genommen, weil unter der Breite φ_1 Berührung des y-Bogens mit dem Parallelkreis stattfindet.

Da wir nun nichts mehr weiter zu thun haben, als in den sphärischen Formeln von § 53. S. 298—300 überall N_1 statt r und φ statt φ_2 zu schreiben und die nötigen ϱ zuzusetzen, erhalten wir mit Benützung der vorstehenden (1) und (4) und im Anschluss an nebenstehende Fig. 1. folgendes:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Gegeben} & \varphi_0 \;, & x \;, & y \\ \text{Gesucht} & \varphi_1 \;, & \varphi \;, & \lambda \text{ und } \gamma \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\text{Auflösung:} \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{x}{M}\,\varrho \tag{6}$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{V^2}{2}\,\frac{y^2}{N_1^2}\,\varrho\, tang\, \varphi_1 \tag{7}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{x}{M}\,\varrho - \frac{V^2}{2}\,\frac{y^2}{N_1^2}\,\varrho\, tang\, \varphi_1 \tag{8}$$

(3) S. 298:
$$\lambda = \frac{y}{N_1}\,\frac{\varrho}{cos\,\varphi_1} - \frac{y^3}{3\,N_1^3}\,\frac{\varrho}{cos\,\varphi_1}\, tang^2\, \varphi_1 \tag{9}$$

(5) S. 299 oder:
$$\lambda = \frac{y}{N_1}\,\frac{1}{cos\,\varphi} + \frac{y^3}{6\,N_1^3}\,\frac{\varrho}{cos\,\varphi}\, tang^2\, \varphi \tag{10}$$

(4) S. 299:
$$\gamma = \frac{y}{N_1}\,\varrho\, tang\, \varphi_1 - \frac{y^3}{6\,N_1^3}\,\varrho\, tang\, \varphi_1\,(1 + 2\, tang^2\, \varphi_1) \tag{11}$$

(6) S. 299 oder:
$$\gamma = \frac{y}{N_1}\,\varrho\, tang\, \varphi + \frac{y^3}{6\,N_1^3}\,\varrho\, tang\, \varphi\,(2 + tang^2\, \varphi) \tag{12}$$

Nun wollen wir noch die Haupt-Coëfficienten [1] und [2] unserer Hilfstafel von S. [8]—[29] des Anhangs einführen, nämlich:

$$\frac{\varrho}{M} = [1] \text{ für die Mittelbreite } \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \tag{13}$$

$$\frac{\varrho}{N_1} = [2] \text{ für die Fusspunkts-Breite } \varphi_1 \tag{14}$$

Damit werden die vorstehenden Formeln:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + [1]\, x \tag{6*}$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{([2]\, y)^2\, V^2}{2\,\varrho} tang\, \varphi_1 \tag{7*}$$

$$\varphi = \varphi_0 + [1]\, x - \frac{([2]\, y)^2}{2\,\varrho} V^2\, tang\, \varphi_1 \tag{8*}$$

$$\lambda = \frac{[2]\, y}{cos\, \varphi_1} - \left(\frac{[2]\, y}{cos\, \varphi_1}\right)^3 \frac{1}{3\,\varrho^2} sin^2\, \varphi_1 \tag{9*}$$

$$\text{oder } \lambda = \frac{[2]\, y}{cos\, \varphi} + \left(\frac{[2]\, y}{cos\, \varphi}\right)^3 \frac{1}{6\,\varrho^2} sin^2\, \varphi \tag{10*}$$

$$\lambda = [2]\, y\, tang\, \varphi_1 - \frac{([2]\, y)^3}{6\,\varrho^2} tang\, \varphi_1\, (1 + 2\, tang^2\, \varphi_1) \tag{11*}$$

$$\text{oder } \lambda = [2]\, y\, tang\, \varphi + \frac{([2]\, y)^3}{6\,\varrho^2} tang\, \varphi\, (2 + tang^2\, \varphi) \tag{12*}$$

Nachdem wir den ersten Teil der Formeln von § 53. von der Kugel auf das Ellipsoid übertragen haben, kann keine Schwierigkeit bestehen, auch den zweiten Teil jener Formeln von § 53. S. 300—301 so zu übertragen. Wir schreiben hiefür sofort die Ergebnisse:

Gegeben φ , λ nebst φ_0 (15)

Gesucht x , y , γ (16)

(9) S. 300:
$$\varphi_1 = \varphi + \frac{V^2}{2\,\varrho} \lambda^2\, sin\, \varphi\, cos\, \varphi \tag{17}$$

(12) S. 301:
$$x = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]} \tag{18}$$

(10) S. 300:
$$y = \frac{\lambda}{[2]} cos\, \varphi_1 + \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{3\,\varrho^2} cos\, \varphi_1\, sin^2\, \varphi_1 \tag{19}$$

oder
$$y = \frac{\lambda}{[2]} cos\, \varphi - \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{6\,\varrho^2} cos\, \varphi\, sin^2\, \varphi \tag{20}$$

(11) S. 300:
$$\gamma = \lambda\, sin\, \varphi_1 - \lambda^3 \frac{1}{6\,\varrho^2} sin\, \varphi_1\, cos^2\, \varphi_1 \tag{21}$$

oder
$$\gamma = \lambda\, sin\, \varphi + \lambda^3 \frac{1}{3\,\varrho^2} sin\, \varphi\, cos^2\, \varphi \tag{22}$$

Nun geben wir auf S. 308—309 ein Zahlen-Beispiel sowohl für die Formeln (7*)—(12*), als auch für deren Umkehrung (17)—(22). Da die ganze Rechnung mit allen Einzelzahlen angegeben ist, wird zur Erklärung nichts weiter nötig sein; auch einige vorübergehend eingeführte Zwischen-Bezeichnungen (*a*), (*b*) u. dgl. erklären sich selbst als kleine Übergangshilfen, mit Rücksicht auf Raummangel.

Die Coëfficienten-Logarithmen $log\,[1]$, $log\,[2]$, $log\, V^2$, $log\,(1 + 2\, t^2)$, $log\,(2 + t^2)$, sind aus den verschiedenen Hilfstafeln unseres Anhanges entnommen.

Im Übrigen sei nur noch bemerkt, dass man das Vorzeichen von y oder λ nicht in der ganzen Rechnung durchführen muss, wie bei uns theoretisch nötig war, man braucht nur am Schlusse zu merken, dass y, λ und γ immer gleiche Zeichen haben.

Der im nachstehenden Beispiele S. 308 und 309 benützte Coordinaten-Nullpunkt Celle ist einer der 40 preussischen Kataster-Nullpunkte, welche im Jahre 1879 eingeführt worden sind.

Meridianbögen und Breiten-Differenzen.

Bei den kleinen Geltungsbereichen der Preussischen Kataster-Coordinaten-Systeme wird die Beziehung zwischen der Abscisse x und der Breiten-Differenz $\varphi_1 - \varphi_0$ hinreichend genau durch den Meridian-Krümmungs-Halbmesser M der Mittelbreite gegeben, nämlich:

$$x = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varrho} M \quad \text{oder} \quad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]}$$

wobei M der Meridian-Krümmungs-Halbmesser für die Mittelbreite $\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}$ ist, oder [1] der entsprechende Coëfficient nach (13) S. 304.

Indessen bei grösserer Ausdehnung empfiehlt sich andererseits eine allgemeine Tafel der Meridianbögen, z. B. diejenige, welche auf S. 216 erwähnt wurde, welche auch in unserem Anhange Seite [38] von 10′ zu 10′ gegeben ist, oder besser in neuer Berechnung Seite [55]—[57] von 1′ zu 1′.

Bei Benützung einer solchen Tafel braucht man für den Coordinaten-Nullpunkt mit gegebener Breite φ_0 nur ein für allemal den Meridianbogen-Wert B_0 zu bestimmen, um dann für jede andere Breite φ_1 den zugehörigen Wert B_1 und dann $x = B_1 - B_0$ zu finden.

Für den Wert $\varphi_0 = 52° 37' 32{,}6709''$, welcher zu dem Coordinaten-Nullpunkt Celle gehört, haben wir die fragliche Interpolation schon beispielshalber aus anderer Veranlassung behandelt, nämlich am Schluss von § 35. S. 220 wurde gefunden $B_0 = 5\,832\,371{,}046^m$ als Meridianbogen vom Äquator bis zu dem Punkte Celle.

Hat man längere Zeit mit Punkten eines Geltungsbereiches zu thun, so kann man auch noch weiteres allgemein tabellarisch vorbereiten, man kann z. B. eine Tafel anlegen, welche für gegebene Fusspunkts-Breite φ_1 sofort die Abscisse x giebt oder umgekehrt. Z. B. in der Gegend von Hannover-Linden, im Geltungsbereiche Celle, benützen wir folgende Hilfstafel:

Geographische Breite = φ		Meridianbogen = B	$B - B_0 = x$	Δx
Celle	52° 37′ 32,6709″	5 832 371,046^m	0,000^m	
	. . . .			
	52° 30′	5 818 380,341	— 13 990,705^m	
				1854,399^m
	52 29	5 816 525,942	— 15 845,104	
				1854,393
	52 28	5 814 671,549	— 17 699,497	
				1854,388
	52 27	5 812 817,162	— 19 553,885	
				1854,382
	52 26	5 810 962,779	— 21 408,267	
				1854,378
	52 25	5 809 108,401	— 23 262,645	
				1854,372
	52 24	5 807 254,029	— 25 117,017	
				1854,367
	52 23	5 805 399,662	— 26 971,384	
				1854,361
	52 22	5 803 545,301	— 28 825,745	
				1854,357
	52 21	5 801 690,944	— 30 680,102	
				1854,351
	52 20	5 799 836,593	— 32 534,453	

Man sieht übrigens aus dem Zusammenhang dieser Zahlenwerte, dass wenn man den Meridian von Celle als x-Axe benützen will, damit der *Punkt* Celle als Nullpunkt für die Berechnung gar keine Rolle spielt; man könnte gerade so gut z. B. $\varphi_0 = 52° 30'$ als Nullpunktsbreite nehmen, dann würden alle x um 13 990,705^m grösser; alle Differenzen der x und alles Übrige blieben aber gleich.

Die Abscissen x eines solchen Coordinaten-Systems können beliebig lang sein, sie könnten z. B. vom Äquator bis zum Nordpol hingehen, wenn man eine Tafel der durchgehenden Meridianbögen benützt.

Das führt auf den Gedanken, dass man z. B. den Meridian von Celle auch so benützen könnte, dass die x schlechthin $= B$ gesetzt würden, mit Weglassung einer runden Zahl, etwa 5000 000; dann bekäme Celle als Zufallspunkt die Abscisse $x = 832\,371{,}046^{m}$ und die Ordinate $y = 0{,}000^{m}$.

In diesem Sinne, d. h. mit Zählung der x vom Äquator der Erde an, wollen wir auch noch die beiden Formeln (17) und (18) zusammen so schreiben:

$$x = \frac{\varphi - \varphi_0}{[1]} + \frac{V^2\,\lambda^2}{2\,\varrho\,[1]} \sin\varphi \cos\varphi \tag{23}$$

Setzt man hier $\varphi_0 = 0$, d. h. zählt man vom Äquator an, so nimmt das erste Glied von (23) den Wert B an, d. h. den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ, und da im zweiten Gliede $[1] = \dfrac{\varrho}{M}$ und $V^2 = \dfrac{N}{M}$ ist, so hat man:

$$x = B + \frac{\lambda^2}{2\,\varrho^2} N \sin\varphi \cos\varphi = B + \frac{\lambda^2}{2\,\varrho} \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{[2]} \tag{24}$$

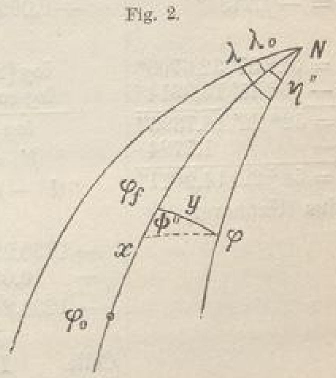
Dabei wird N oder [2] zur Breite φ gehörig genommen, während wir es früher zur Fusspunkts-Breite φ_1 genommen haben. Solche und ähnliche Unterscheidungen würden sich erst in den höheren Gliedern, die hier nicht mehr mit genommen sind, ausdrücken. Wir werden der Formel (24) oder ähnlichen, auch später wieder begegnen.

Rechnungs-Formular der preussischen Kataster-Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881.

Da in Preussen die Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in Form von geographischen Coordinaten geschehen, der Feld- und Landmesser aber rechtwinklige Coordinaten haben muss, kommt die gegenseitige Verwandlung solcher Coordinaten so oft vor, dass die Kataster-Anweisung hiefür ein „Trig. Form. 6.“ gegeben hat.

Die dazu nötigen Hilfstafeln sind aber in der amtlichen Anweisung IX. nicht enthalten, sondern es wird hiefür verwiesen auf die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst von F. G. Gauss 1876 und 2. Aufl. 1892. Als Quellenschrift für die Methode des Form. 6. wird angegeben: „Börsch, Anleitung zur Berechnung der rechtw. sphär. Coordinaten u. s. w. 1868, 1869, S. 19 und 1885, S. 91“. Namentlich die Rechnung mit Additamenten, welche unseren Gliedern dritter Ordnung $\dfrac{\lambda^3 \cos\varphi \sin^2\varphi}{6}$ u. s. w. entspricht, ist aus Börsch in das preussische Kataster übergegangen.

Fig. 2.



Das erwähnte Form. 6. betrifft nur die Verwandlung der geographischen Coordinaten in rechtwinklige Coordinaten, und nicht umgekehrt; auch ist die Berechnung der Meridian-Konvergenz nicht mit aufgenommen.

Geographische Coordinaten φ, λ aus rechtwinkligen Coordinaten x, y.

Coordinaten-Nullpunkt Celle mit $\varphi_0 = 52^\circ\,37'\,32{,}6709''$ $\quad L_0 = 27^\circ\,44'\,54{,}8477''$

Gegeben Ägidius $x = -28\,308{,}394^m$ $\quad y = -23\,271{,}813^m$

Genäherte Berechnung von $\varphi_1 - \varphi_0$ aus x nach der Hilfstafel Seite [39] des Anhangs; mit rund $\varphi = 52^1/_2{}^\circ$

$20\,000^m$	giebt	$10'\,47{,}1''$
$8\,000$	„	$4'\,18{,}85$
300	„	$9{,}70$
8	„	$0{,}24$
		$-15'\,15{,}89''$
		$\varphi_0 = 52^\circ\,37'\,32{,}67''$
Genähert		$\varphi_1 = 52^\circ\,22'\,16{,}78''$

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} = 52^\circ\,29'\,54{,}72''$$

Damit geben die Hilfstafeln des Anhangs:

mit φ_m
Seite [33], $\log[1] = 8.509\,9477{\cdot}2$

mit φ_1
Seite [33], $\log[2] = 8.508\,8706{\cdot}9$
„ [21], $\log V^2 = 0.001\,086$

$\varphi_1 = \varphi_0 + [1]\,x$	$\lambda = \dfrac{[2]\,y}{\cos\varphi_1} - \left(\dfrac{[2]\,y}{\cos\varphi_1}\right)^3 \dfrac{1}{3\,\varrho^2}\sin^2\varphi_1$	$\gamma = [2]\,y\,\mathrm{tang}\,\varphi_1 - \dfrac{([2]\,y)^3}{6\,\varrho^2}\,t_1(1+2t_1^2)$
	oder:	oder:
$\varphi = \varphi_1 - \dfrac{([2]\,y)^2}{2\,\varrho}\,V^2\,\mathrm{tang}\,\varphi_1$	$\lambda = \dfrac{[2]\,y}{\cos\varphi} + \left(\dfrac{[2]\,y}{\cos\varphi}\right)^3 \dfrac{1}{6\,\varrho^2}\sin^2\varphi$	$\gamma = [2]\,y\,\mathrm{tang}\,\varphi + \dfrac{([2]\,y)^3}{6\,\varrho^3}\,t\,(2+t^2)$
$\log[1]$ 8.509 9477·2 $\log x$ 4.451 9152·3$_n$ $\log[1]\,x$ 2.961 8629·5$_n$ $[1]\,x = -915{,}9314''$	$\log[2]$ 8.508 8706·9 $\log y$ 4.366 8302·2$_n$ $\log[2]\,y$ 2.875 7009·1$_n$ $\log\cos\varphi_1$ 9.785 7153·5 $\log(b)$ 3.089 9855·6$_n$ $(b) = -1230{,}2278''$	$\log[2]\,y$ 2.875 7009·1$_n$ $\log\mathrm{tang}\,\varphi_1$ 0.113 0011·1 $\log(c)$ 2.988 7020·2$_n$ $(c) = -974{,}3209''$ Hilfstafel Seite [49]
$\log([2]\,y^2$ 5.751 402 $\log\mathrm{tang}\,\varphi_1$ 0.113 001 $\log V^2$ 0.001 086 $-(1:2\,\varrho)$ 4.384 545$_n$ $\log(a)$ 0.250 034$_n$ $(a) = -1{,}7784''$	$(b)^3$ 9.2700$_n$ $\quad (b')^3$ 9.2699$_n$ $\sin^2\varphi_1$ 9.7974 $\quad \sin^2\varphi$ 9.7974 $-(1:3\varrho^2)$ 8.8940$_n$ $\quad (1:6\,\varrho^2)$ 8.5930 (c) 7.9614 $\quad +(c')$ 7.6603$_n$ $+0{,}0091''$ $\quad -0{,}0046''$	$([2]\,y^3$ 8.6271$_n$ $\quad ([2]\,y)^3$ 8.6271$_n$ t_1 0.1130 $\quad t$ 0.1130 $(1+2\,t^2)$ 0.6399 $\quad (2+t^2)$ 0.5661 $-(1:6\varrho^2)$ 8.5930$_n$ $\quad (1:6\varrho^2)$ 8.5930 (d) 7.9730 $\quad +(d')$ 7.8992$_n$ $+0{,}0094''$ $\quad -0{,}0079''$
Celle $\varphi_0 = 52^\circ\,37'\,32{,}6709''$ $+[1]x = -\;0^\circ\,15'\,15{,}9314$ $\varphi_1 = 52^\circ\,22'\,16{,}7395''$ $(a) = -\;1{,}7784$ $\varphi = 52^\circ\,22'\,14{,}9611''$ Ägidius (Hannover).	$\log[2]\,y$ 2.875 7009·1$_n$ $\log\cos\varphi$ 9.785 7202·1 $\log(b')$ 3.089 9807·0$_n$ $(b') = -1230{,}2141''$ $(b)-(c)$ $\quad (b')+(c')$ $-1230{,}2278''$ $\quad -1230{,}2141''$ $+\;0{,}0091$ $\quad -\;0{,}0046$ $-1230{,}2187''$ $\quad -1230{,}2187''$ $\lambda = -0^\circ\,20'\,30{,}2187''$ Celle $L_0 = 27^\circ\,44'\,54{,}8477$ Ägidius $L = 27^\circ\,24'\,24{,}6290''$	$\log[2]\,y$ 2.875 7009·1$_n$ $\log\mathrm{tang}\,\varphi$ 0.112 9933·7 (c') 2.988 6942·8$_n$ $(c') = -974{,}3035''$ $(c)-(d)$ $\quad (c')+(d')$ $-974{,}3209''$ $\quad -974{,}3035''$ $+\;0{,}0094$ $\quad -\;0{,}0079$ $-974{,}3115$ $\quad -974{,}3114$ Meridian-Convergenz $\gamma = -16'\,14{,}311''$

Rechtwinklige Coordinaten x, y aus geographischen Coordinaten φ, λ.

Coordinaten-Nullpunkt Celle $\varphi_0 = 52° \; 37' \; 32{,}6709''$ $L_0 = 27° \; 44' \; 54{,}8477''$

Gegeben Ägidius $\varphi = 52° \; 22' \; 14{,}9611''$ $L = 27° \; 24' \; 24{,}6290''$

Differenzen $\varphi - \varphi_0 = - \; 15' \; 17{,}7098''$ $\lambda = -0° \; 20' \; 30{,}2187''$

$\lambda = - \; 1230{,}2187''$

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{V^2}{2\varrho} \lambda^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]} = x$$

Anhang Seite [21] giebt . . .

$\log \lambda$	3.089 9823·2
$\log \lambda^2$	6.179 965
$\log \sin \varphi$	9.898 714
$\log \cos \varphi$	9.785 720
$\log V^2$	0.001 086
$\log (1:2\varrho)$	4.384 545
$\log (a)$	0.250 030

$(a) = 1{,}7784''$

$\varphi = 52° \; 22' \; 14{,}9611''$
$+ (a) \qquad + \; 1{,}7784$
$\varphi_1 = 52° \; 22' \; 16{,}7395''$
Celle $\varphi_0 = 52° \; 37' \; 32{,}6709''$
$\varphi_1 - \varphi_0 = - \; 15' \; 15{,}9314''$
$= - \; 915{,}9314$

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} = 52° \; 29' \; 54{,}7052''$$

Mit φ_1 giebt die Hilfstafel Seite [33] des Anhangs:

$\log [2] = 8.508 \; 8706{\cdot}9$

und mit φ_m giebt dieselbe Hilfstafel Seite [33]:

$\log [1]$	8.509 9477·2
hiezu $\log (\varphi_1 - \varphi_0)$	2.961 8629·5
$\log x$	4.451 9152·3

$x = - \; 28308{,}394^{m}$

$$y = \frac{\lambda}{[2]} \cos\varphi_1 + \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{3\varrho^2} \cos\varphi_1 \sin^2\varphi_1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\lambda}{[2]} \cos\varphi - \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{6\varrho^2} \cos\varphi \sin^2\varphi$$

$1:[2]$	1.491 1293·1	(b)	4.3668_n
λ	$3.089 \; 9823{\cdot}2_n$	λ^2	6.1800
$\cos \varphi_1$	9.785 7153·5	$\sin^2 \varphi_1$	9.7974
(b)	$4.366 \; 8269{\cdot}8_n$	$(1:3\varrho^2)$	8·8940
		(c)	9.2382_n

$1:[2]$	1.491 1293·1	(b')	4.3668_n
λ	$3.089 \; 9823{\cdot}2_n$	λ	6.1800
$\cos \varphi$	9.785 7202·1	$\sin^2 \varphi$	9.7974
(b')	$4.366 \; 8318{\cdot}4_n$	$-(1:6\varrho^2)$	8.5930_n
		(c')	8.9372

$(b) = - \; 23 \; 271{,}639$
$(c) = \qquad - \; 0{,}173$
$y = - \; 23 \; 271{,}812$

$(b') = - \; 23 \; 271{,}900$
$(c') = \qquad + \; 0{,}087$
$y = - \; 23 \; 271{,}813$

$$\gamma = \lambda \sin\varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6\varrho^2} \sin\varphi_1 \cos^2\varphi_1 \quad \text{oder} \quad \gamma = \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3\varrho^2} \sin\varphi \cos^2\varphi$$

λ	$3.089 \; 9823{\cdot}2_n$	$\lambda \sin \varphi_1$	2.9887_n
$\sin \varphi_1$	9.898 7164·6	λ^2	6.1800
$\lambda \sin \varphi_1$	$2.988 \; 6987{\cdot}8_n$	$\cos^2 \varphi_1$	9.5714
		$-(1:6\varrho^2)$	8.5930_n
		(d)	7.3331

λ	$3.089 \; 9823{\cdot}2_n$	$\sin \lambda \varphi$	2.9887_n
$\sin \varphi$	9.898 7135·7	λ^2	6.1800
$\lambda \sin \varphi$	$2.988 \; 6958{\cdot}9_n$	$\cos^2 \varphi$	9.5714
		$(1:3\varrho^2)$	8.8940
		(d')	7.6341_n

$\lambda \sin \varphi_1 = - \; 974{,}3136''$
$(d) = \quad + \; 0{,}0022''$
$\gamma = - \; 974{,}3114''$ $\qquad \gamma = - \; 16' \; 14{,}3114''$

$\lambda \sin \varphi = - \; 974{,}3072''$
$(d') = \quad - \; 0{,}0043''$
$\gamma = - \; 974{,}3115''$

Schluss-Ergebnis: Ägidius $y = - \; 23 \; 271{,}813^{m}$ $\quad x = - \; 28 \; 308{,}394^{m}$

Meridian-Konvergenz $\gamma = - \; 16' \; 14{,}311''$.

In Fig. 2. S. 307 sind die Bezeichnungen dieses Formulars eingeschrieben, es ist nämlich:

φ_0 die Breite des Coordinaten-Ursprungs,
$\varphi_{\prime}$ die Breite des Ordinaten-Fusspunktes,
φ die Breite des gesuchten Punktes,
λ_0 die Länge des Coordinaten-Ursprungs,
λ die Länge des gesuchten Punktes,
x und y die gesuchten Coordinaten.

Dabei ist x von φ_0 bis $\varphi_{\prime}$ auf dem Meridian nördlich positiv, südlich negativ gezählt und y rechtwinklig zum Meridian östlich positiv, westlich negativ gezählt.

Die Aufgabe lautet: Aus gegebenen φ_0, φ, λ_0, λ die Coordinaten x, y zu berechnen.

Die Differenz $\lambda - \lambda_0$ wird in Sekunden verwandelt, mit η'' bezeichnet, und weiter kommt die Breiten-Differenz $\varphi_{\prime} - \varphi = \psi''$ in Betracht, welche aus η'' berechnet wird nach der Formel

$$\psi'' = \eta''^2 q \tag{25}$$

Dieses entspricht unserer Formel (17) S. 305 für $\varphi_1 - \varphi$, d. h.:

$$\varphi_1 - \varphi = \lambda^2 \frac{V^2}{2\varrho} \sin\varphi \cos\varphi \tag{26}$$

Daraus ergiebt sich, dass der Faktor q in der Formel (25), umgesetzt in unsere Bezeichnungen der Formel (26), diese Bedeutung hat:

$$q = \frac{V^2}{2\varrho} \sin\varphi \cos\varphi \tag{27}$$

Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, dass das hier gebrauchte $\frac{V^2}{2\varrho}$ auch in den Formeln und Tafeln der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme vorkommt mit der Bezeichnung (3), wie wir in § 39. S. 228 schon angegeben haben. In einem Formular kann man den konstanten Logarithmus $\log(1:2\varrho) = 4.384\,545$ gedruckt aufnehmen, so dass also eine Tafel für $\log V^2$, welche man zu sehr vielen anderen Zwecken ohnehin braucht, genügt; auch $\log\sin\varphi$ und $\log\cos\varphi$ nehmen wir lieber besonders, als vereinigt in der Tafel für $\log q$, weil es hier angezeigt ist, mindestens 6 stellig scharf zu rechnen.

Nachdem man in dem genannten Formular 6. ψ'' zu φ addiert, und damit $\varphi_{\prime}$ erhalten hat, kann man aus der Differenz $\varphi_{\prime} - \varphi_0$ die Abscisse x berechnen. Das Formular bedient sich hiezu der schon oben (S. 306) von uns citierten und beschriebenen Hilfstafel von F. G. Gauss, wobei aber zu bemerken ist, dass die Interpolation eine Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen verlangt. Auch unsere Rechnung auf S. 309 mit der Mittelbreite φ_m ist hier noch nicht die beste; auf ein bequemeres Rechnungsverfahren, nach der Formel (37) § 35. S. 218 werden wir später zurückkommen; auch ist hier die neue Tafel Seite [55]—[57] zuzuziehen.

Um vollends die Ordinate y zu erhalten, rechnet jenes Formular 6. mit Längen-Sekunden L und mit Additamenten, wodurch in anderer Form dasselbe erhalten wird, wie durch die Reihen-Entwicklung (19) S. 305.

Wenn man unser Beispiel Ägidius von S. 309 nach dem fraglichen Formular 6. behandelt, so bekommt man in dem Teile für y:

$\varphi_f = 52^\circ\, 22'\, 16{,}7395''$ $\eta = 0^\circ\, 20'\, 30{,}2187''$			
$\log \eta'' = \log 1230{,}2187''$	3.089 9823		*log*
Addit.-Tafel für 3.089 $+ 2\,A\,\eta''$	51	43,2605	1.6361
Tafel der $\log L$ für $\varphi = 52^\circ\, 23'$ $\log L_t$	1.276 7268	$\Delta\, 1''$	1.4354
Interpolation für $-\,43{,}2605''$, $\Delta \log L$	1179		3.0815
$\log tang\,(y:r)$	4.366 8321		
Addit.-Tafel für 4.367 $-\,2\,A_y$	$-\,19$		
$\log y$	4.366 8302		

$$y = 23271{,}81^m$$

Diesem entspricht bei unserer Rechnung S. 309:

Hilfstafel Seite [33] für $52^\circ\, 22'\, 15''$, $\log\,[2]$	8.508 8707·0	(b')	4.3668
$\log\,(1:[2])$	1.491 1293·0	λ^2	6.1800
$\lambda = 0^\circ\, 20'\, 30{,}2187'' = 1230{,}2187$, $\log \lambda$	3.089 9823·2	$sin^2\,\varphi$	9.7974
$\varphi = 52^\circ\, 22'\, 14{,}9611''$ $\log \cos \varphi$	9.785 7202·1	$-(1:6\,\varrho^2)$	8.5930_n
(oder Formel (13) S. 301 $\log\,(b')$	4.366 8318·3	$\log\,(c')$	8.9372_n
mit $\cos\, 52^\circ\, 22'\, 15{,}5539''$)	$(b') = 23271{,}900$		$(c') = -\,0{,}087$

$$y = 23271{,}813^m$$

Es mag unentschieden bleiben, welche der verschiedenen Rechnungen die bessere ist, wir haben aber die Vergleichung hier hergesetzt, weil die Landmesser oft den Wunsch haben, ausser der ihnen durch amtliches Formular vorgeschriebenen Rechnung eine unabhängige Kontrollrechnung nebenher zu haben.

Bemerkung über die geographischen Längen und Breiten.

Die geographischen Längenunterschiede λ werden teils in Bogenmass teils in Zeitmass angegeben, zu deren gegenseitiger Verwandlung unsere Hilfstafel auf Seite [42] des Anhangs benützt werden kann.

Als Beispiel wollen wir im System der Preussischen Landesaufnahme nehmen:

Berlin, Rauenberg	$\lambda_0 = 31^\circ\, 2'\, 4{,}9280'' = 2^h\, 4^m\, 8{,}328533^s$	
Celle	$\lambda = 27^\circ\, 44'\, 54{,}8477'' = 1^h\, 50^m\, 59{,}656514^s$	
Differenz	$\lambda_0 - \lambda = 3^\circ\, 17'\, 10{,}0803'' = 0^h\, 13^m\, 8{,}672019_s$	

Bei der Benützung der Hilfstafel Seite [42] kann man beliebig viele Dezimalen schreiben, obgleich nur $0{,}0001^s$ angegeben ist. Z. B. für vorstehendes $\lambda_0 - \lambda$ hat man:

3°	$0^h\, 12^m\, 0^s$	$0^h\, 13^m =$	$3^\circ\, 15'\, 0''$
$17' =$	$1^m\, 8^s$	$8^s =$	$2'\, 0''$
$10'' =$	$0{,}666\,667^s$	$0{,}6^s =$	$9{,}0''$
$0{,}08'' =$	$0{,}005\,333^s$	$0{,}07^s =$	$1{,}05''$
$0{,}0003'' =$	$0{,}000\,020^s$	$0{,}002^s =$	$0{,}030''$
		$0{,}00002^s =$	$0{,}00030''$
Summe	$0^h\, 13^m\, 8{,}672\,020^s$	Summe	$3^\circ\, 17'\, 10{,}08030''$

Was die Zahlenschärfe solcher Angaben, ebenso wie auch für geographische Breiten, betrifft, so kommt die etwaige astronomische Messung dabei für uns nicht in Betracht (vgl. § 26. S. 162 bis 163). In geodätischer Beziehung gelten Längen und Breiten nur als Mass-Bestimmungen auf der Oberfläche des Ellipsoids; und da z. B. 1″ in Breite rund = 30 Meter ist, so bringt 0,001″ immer noch $0{,}03^m$ oder 3 Centimeter, und man muss daher geographische Coordinaten auf 0,0001″ oder gar auf 0,00001″ genau angeben, wenn man die Genauigkeit geodätischer Messungen, mit der immer formell etwas übertrieben nötigen Schärfe, durch geographische Längen und Breiten ausdrücken will.