Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 56. Entfernung und Azimute aus geographischen Coordinaten

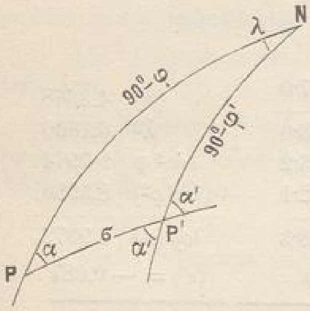
urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

§ 56. Entfernung und Azimute aus geographischen Coordinaten.

Die Einführung des verkürzten Breiten-Unterschiedes nach § 54. S. 302 genügt bereits, um auf mässige Ausdehnung von Dreiecken III. Ordnung mit geographischen Coordinaten Entfernungen und Azimute zu berechnen.

Indem wir zunächst die Aufgabe rein sphärisch betrachten, haben wir im Anschluss an Fig. 1. folgendes:

Fig. 1.
Sphärisches Polardreieck.



Wenn zwei Punkte P und P' durch ihre geographischen Breiten φ und φ' nebst ihrem geographischen Längen-Unterschied λ gegeben sind, so wird dadurch ein sphärisches Dreieck NPP' bestimmt, dessen Seite $NP = 90° - \varphi$, dessen Seite $NP' = 90° - \varphi'$ und dessen Winkel bei $N = \lambda$ ist.

Man kennt also von dem Dreieck zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, und daher ist auch die dritte Seite σ und die beiden anderen Dreiecks-Winkel α und $180° - \alpha'$ bestimmt, d. h. man kann dann die Entfernung beider Punkte $PP' = \sigma$ und die beiden Azimute in P und in P', bezw. $= \alpha$ und $= \alpha'$ berechnen.

Wenn man die Gaussschen (bzw. Neperschen) Gleichungen von § 27. S. 165 auf unseren Fall anwendet, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2} &= \cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\\
\sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2} &= \sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}\\
\cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\\
\cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wir wollen die Mittelwerte besonders bezeichnen:

$$\frac{\varphi'+\varphi}{2} = \varphi_0 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha'+\alpha}{2} = \alpha_0 \tag{2}$$

Wenn σ und λ klein sind, so werden auch $\varphi' - \varphi$ und $\alpha' - \alpha$ klein und dann hat man genähert aus (1):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma \sin\alpha_0 &= \cos\varphi_0\,\lambda\\
\sigma \cos\alpha_0 &= \varphi' - \varphi
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\alpha' - \alpha = \sin\varphi_0\,\lambda \tag{3}$$

Die beiden ersten Gleichungen (2) geben:

$$tang\,\alpha_0 = \frac{\lambda\cos\varphi_0}{\varphi'-\varphi} \tag{4}$$

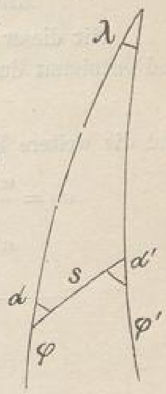
$$\sigma = \frac{\lambda\cos\varphi_0}{\sin\alpha_0} = \frac{\varphi'-\varphi}{\cos\alpha_0} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{(\varphi'-\varphi)^2 + (\lambda\cos\varphi_0)^2} \tag{5}$$

Diese sphärischen Formeln kann man auf das Ellipsoid übertragen, wenn man nur überall nach (9) § 54. S. 303 den verkürzten Breiten-Unterschied $\frac{\varphi'-\varphi}{V^2} = (\varphi'-\varphi)\frac{M}{N}$

an Stelle des sphärischen Breiten-Unterschiedes setzt, und im übrigen den Quer-Krümmungs-Halbmesser N der Mittelbreite $\frac{\varphi + \varphi'}{2}$ als Kugelhalbmesser r zu Grunde legt.

Die Aufgabe sei mit Bezugnahme auf Fig. 2. so gefasst:

Fig. 2.



Gegeben sind zwei Punkte auf dem Ellipsoid, mit den Breiten φ und φ' und mit dem Längen-Unterschied λ; es soll die Entfernung beider Punkte $= s$, linear auf dem Ellipsoid, und die beiden Azimute α und α' berechnet werden.

Die Gleichungen (3), (4) und (5) geben:

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \sin \frac{\varphi + \varphi'}{2} \tag{6}$$

$$tang\, \alpha_0 = tang\, \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{(\varphi' - \varphi)\frac{M}{N}}$$

$$\sigma = \frac{s}{N} = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} = \frac{(\varphi' - \varphi)\frac{M}{N}}{\cos \alpha_0}$$

oder
$$\sigma = \frac{s}{N} = \sqrt{\left((\varphi' - \varphi)\frac{M}{N}\right)^2 + (\lambda \cos \varphi_0)^2}$$

Wir wollen diese Formeln etwas umstellen, und auch die nötigen ϱ zusetzen, wodurch wir erhalten:

$$tang\, \alpha_0 = \frac{N \lambda \cos \varphi_0}{M(\varphi' - \varphi)} = V^2 \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\varphi' - \varphi} \tag{7}$$

$$s = \frac{\frac{N}{\varrho} \lambda \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\frac{M}{\varrho}(\varphi' - \varphi)}{\cos \alpha_0} \tag{8}$$

oder
$$s = \sqrt{\left(\frac{N}{\varrho} \lambda \cos \varphi_0\right)^2 + \left(\frac{M}{\varrho}(\varphi' - \varphi)\right)^2} \tag{9}$$

Oder endlich wenn man $\frac{\varrho}{M} = [1]$ und $\frac{\varrho}{N} = [2]$ setzt, wie in unseren Hilfstafeln angenommen ist, (vgl. § 40. S. 230) kann man die Formeln auch so schreiben:

$$tang\, \alpha_0 = tang\, \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_0}{\frac{\varphi' - \varphi}{[1]}} \tag{10}$$

$$s = \frac{\frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\frac{\varphi' - \varphi}{[1]}}{\cos \alpha_0} \tag{11}$$

oder
$$s = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_0\right)^2 + \left(\frac{\varphi' - \varphi}{[1]}\right)^2} \tag{12}$$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir die zwei trigonometrischen Hauptpunkte der Stadt Hannover, welche nach Mitteilung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme von 1887 folgende geographische Coordinaten haben:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Ägidius} \; . \; . \; . & \varphi' = 52^\circ\, 22'\, 14{,}9611'' & L' = 27^\circ\, 24'\, 24{,}6290'' \\ \text{Wasserturm} \; . & \varphi = 52^\circ\, 21'\, 49{,}9080'' & L = 27^\circ\, 22'\, 25{,}0168'' \end{array}\right\} \quad (13)$$

$$\begin{array}{llll} \text{Differenzen } \varphi' - \varphi & = +0^\circ\, 0'\, 25{,}0531'' & \lambda = & 0^\circ\ \ 1'\, 59{,}6122'' \\ & = \qquad 25{,}0531'' & = & 119{,}6122'' \\ \text{Mittel } \varphi_0 & = 52^\circ\, 22'\ \ 2{,}43455'' & & \end{array}$$

Mit dieser Mittelbreite geht man in die Hilfstafel des Anhangs Seite [22] ein, und entnimmt durch leichte Interpolation:

$$\log\,[1] = 8.509\,9574 \qquad \log\,[2] = 8.508\,8708$$

und die weitere Rechnung nach den Formeln (6) und (10)—(12) giebt:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 71^\circ\, 6'\, 37{,}69''$$

$$\frac{\alpha' - \alpha}{2} = \ \ 0^\circ\, 0'\, 47{,}36''$$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha' = 71^\circ\, 7'\, 25{,}05'' & \log s = 3.378\,7016 \\ \alpha\ = 71^\circ\, 5'\, 50{,}33'' & s = 2391{,}672^{\mathrm{m}} \end{array}\right\} \quad (14)$$

Azimute und Richtungswinkel.

Während die verschiedenen Coordinaten φ, λ und x, y in ihrer Bedeutung für die Kartenzeichnung sofort verständlich sind, bedürfen oft die Begriffe von Azimut und Richtungswinkel und ihrer Differenz-Meridiankonvergenz, noch anderer Klarlegung, wozu unser mehrfach benütztes Beispiel Wasserturm-Ägidius, das in Fig. 3. S. 315 dargestellt ist, dienen soll.

In Fig. 3. ist Celle, (Stadtkirche, Helmstange) nordöstlich von Hannover, der Nullpunkt, auf welchen sich die rechtwinkligen Coordinaten von W und A beziehen; es sind also die Geraden $A\,A'$ und $W\,W'$ Parallelen zu dem Meridian von Celle, folglich $W'\,W\,A = a$ und $W\,A\,A'' = a'$ die Richtungswinkel (Preuss. Katasterbezeichnung „Neigungen") der Geraden WA in W und A.

Das sind dieselben Winkel, welche in Fig. 2. S. 259 mit α und α' bezeichnet waren, während wir jetzt, mit Änderung der Buchstaben-Bezeichnungen, die Richtungswinkel mit a, dagegen die Azimute mit α bezeichnen, so dass die Meridian-Konvergenzen in W und A diese sind:

$$-\gamma = \alpha - a \quad , \quad -\gamma' = \alpha' - a' \qquad (15)$$

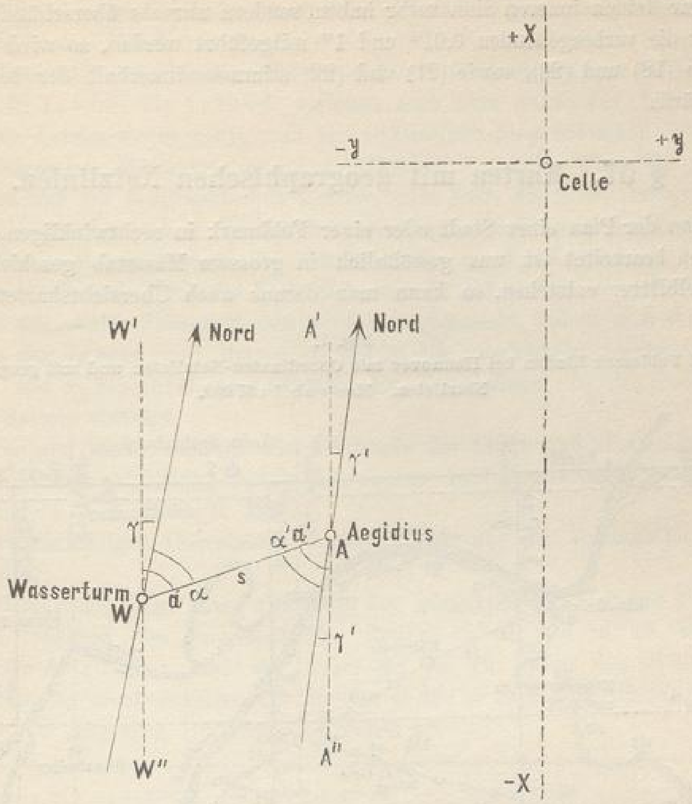
Wir bemerken, dass hier γ und γ' negativ sind, weil in unserem Falle Fig. 3. die Ordinaten y negativ sind, und γ stets das Vorzeichen von y hat.

Der Gang unserer Berechnungen ist dieser:

Punkt	Geogr. Breite	Geogr. Länge	
Celle, Stadtkirche . . .	52° 37′ 32,6709″	27° 44′ 54,8477″	
Ägidius (Hannover) . . .	52° 22′ 14,9611″	27° 24′ 24,6290″	(16)
Wasserturm (Linden) . .	52° 21′ 49,9080″	27° 22′ 25,0168″	

Wie man hieraus, unter Annahme des Punktes Celle als Coordinaten-Nullpunkt, die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes Ägidius berechnet, haben wir auf S. 309 ausführlichst gezeigt, und da man für den zweiten Punkt Wasserturm dieselbe Berechnung machen kann, ist nachgewiesen, auf welche Weise man zu den rechtwinkligen Coordinaten von Ägidius und Wasserturm gelangt, nämlich:

Fig. 3.



$$\left.\begin{array}{llll} \text{Ägidius} \ \ . \ \ . & y' = -23\,271{,}813^m & x' = -28\,308{,}394^m \\ \text{Wasserturm} & y = -25\,538{,}489^m & x = -29\,071{,}472^m \\ \hline \text{Differenzen} & y' - y = +\ \ 2\,266{,}676 & x' - x = +\ \ \ 763{,}078 \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Dadurch ist die Linie Wasserturm-Ägidius nach Entfernung und Richtung festgelegt im ebenen rechtwinkligen (Soldnerschen) Coordinatensystem:

$$log\ WA = 3.378\,7020 \qquad WA = s = 23\,91{,}674^m \qquad (18)$$

$$a = (WA) = 71^\circ\,23'\,39{,}0'' \qquad a' = (AW) \pm 180^\circ = 251^\circ\,23'\,39{,}0'' \qquad (19)$$

Andererseits haben wir oben bei (14) gefunden:

$$s = 2391{,}672^m \qquad \alpha = 71^\circ\,5'\,50{,}3'' \qquad \alpha' = 71^\circ\,7'\,25{,}0'' \qquad (20)$$

Die Vergleichung von (19) und (20) giebt:

$$a - \alpha = 17'\,48{,}7'' \qquad a' - \alpha' = 16'\,14{,}0'' \qquad (21)$$

Dieses muss stimmen mit der Berechnung von γ auf S. 309 für Ägidius und mit der entsprechenden Berechnung für Wasserturm, nämlich:

$$\gamma = -17'\,48{,}9'' \qquad \gamma' = -16'\,14{,}3'' \qquad (22)$$

Dass hier zwischen (20) und (22) noch kleine Differenzen bis zu 0,3″ vorkommen, hängt damit zusammen, dass schon die Rechnung von S. 309 nicht unbedingt auf 1^{mm} sicher ist, weshalb auch (18) und (20) um 2^{mm} differieren.

Wenn man bedenkt, dass bei solchen Verhältnissen die letzten Stellen 0,001^m und 0,1″ gar keinen inneren Sinn mehr haben, sondern nur als überschüssige Kontrollstellen für die vorhergehenden 0,01^m und 1″ mitgeführt werden, so wird man sagen: die Proben (18) und (20), sowie (21) und (22) stimmen innerhalb der beabsichtigten Rechenschärfe.

§ 57. Karten mit geographischen Netzlinien.

Wenn der Plan einer Stadt oder einer Feldmark in rechtwinkligen sphärischen Coordinaten bearbeitet ist, was gewöhnlich in grossem Massstab geschieht, so dass viele Einzelblätter entstehen, so kann man daraus auch Übersichtskarten und topo-

Fig. 1.
Stadt und Feldmark Linden bei Hannover mit Coordinaten-Netzlinien und mit geographischen Netzlinien. Massstab 1 : 37 000.