



Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 57. Karten mit geographischen Netzlinien

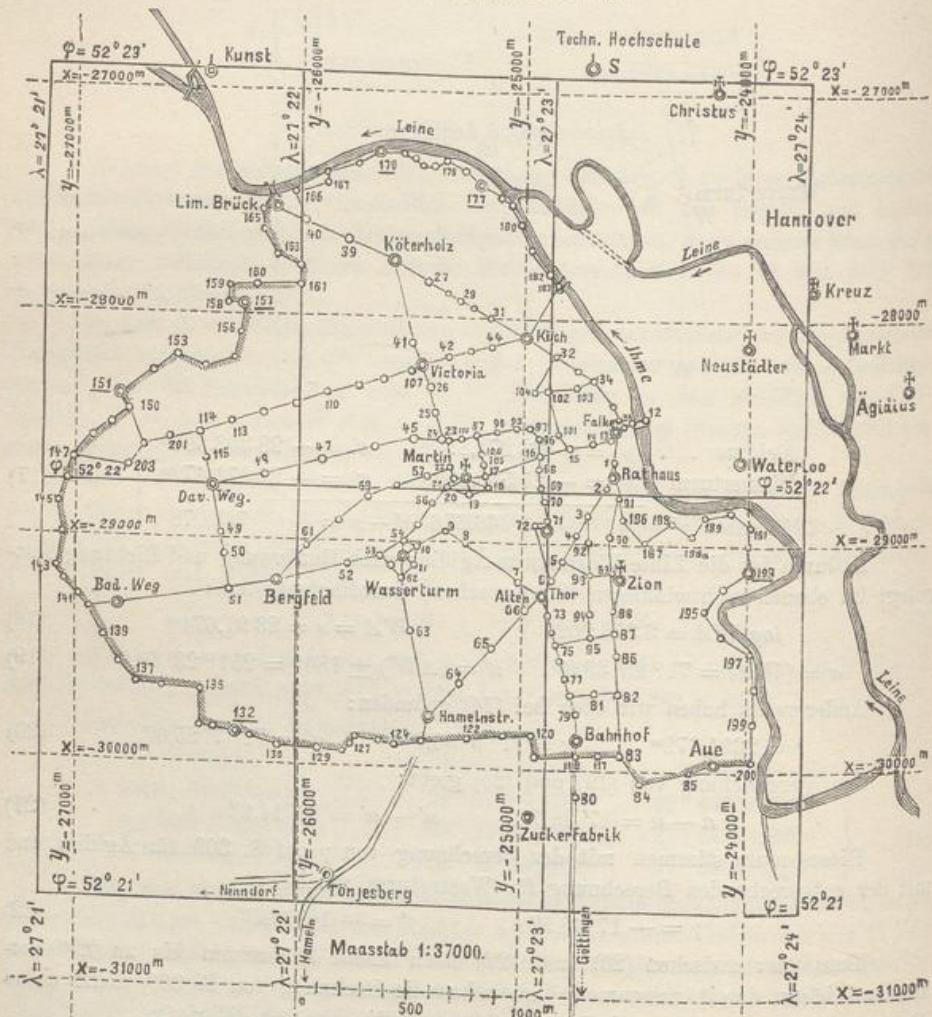
[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

Wenn man bedenkt, dass bei solchen Verhältnissen die letzten Stellen $0,001''$ und $0,1''$ gar keinen inneren Sinn mehr haben, sondern nur als überschüssige Kontrollstellen für die vorhergehenden $0,01''$ und $1''$ mitgeführt werden, so wird man sagen: die Proben (18) und (20), sowie (21) und (22) stimmen innerhalb der beabsichtigten Rechenschärfe.

§ 57. Karten mit geographischen Netzlinien.

Wenn der Plan einer Stadt oder einer Feldmark in rechtwinkligen sphärischen Koordinaten bearbeitet ist, was gewöhnlich in grossem Massstab geschieht, so dass viele Einzelblätter entstehen, so kann man daraus auch Übersichtskarten und topo-

Fig. 1.
Stadt und Feldmark Linden bei Hannover mit Koordinaten-Netzlinien und mit geographischen Netzlinien. Massstab 1 : 37 000.



graphische Karten kleinen Massstabes herstellen, in welchen immer wieder das quadratische Netz der rechtwinkligen Coordinaten den festen Rahmen für die Zeichnung und Vervielfältigung bietet.

Bei topographischen Karten in 1:25 000 und wohl auch schon bei Stadt-Übersichtskarten in 1:5 000 bis 1:10 000 verlangt man aber wegen des Anschlusses an die allgemeine Landes-Topographie, und zur allgemeinen geographischen Orientierung, die Einzeichnung von Meridianen und Parallelkreisen für runde Werte der geographischen Längen und der geographischen Breiten, oder kurz, die Einzeichnung von geographischen Netzlinien, welche die Karte in geographische Trapeze einteilen.

Die Bestimmungsstücke hiefür bekommt man durch die Formeln, welche wir in § 55. entwickelt und durch die Rechenschemata S. 308 und S. 309 erläutert haben. Insbesondere das zweite Schema S. 309 wird hier gebraucht, indem man für gegebene runde Werte der Längen und Breiten L und φ die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten y und x berechnet, und darnach die Trapez-Ecken in das rechtwinklige Coordinaten-System einträgt.

Als Beispiel hiefür nehmen wir die Karte der Stadt und Gemarkung Linden bei Hannover, deren Aufnahme wir in den Jahren 1887—1889 gemacht haben (vgl. hiezu II. Band, 4. Aufl. 1893, S. 353).

Die rechtwinkligen Coordinaten beziehen sich auf das Preussische Katasternsystem 27. Celle.

Die Gemarkung liegt etwa zwischen den geographischen Längen $27^{\circ} 21'$ und $27^{\circ} 24'$ und zwischen den geographischen Breiten $52^{\circ} 21'$ und $52^{\circ} 23'$, sie umfasst also 6 Minuten-Abteilungen; und wir haben für die 12 Ecken des entsprechenden Minuten-Netzes die rechtwinkligen Coordinaten y und x nach dem Schema von S. 309 berechnet, wie in folgender Übersicht angegeben ist.

	$\lambda = 27^{\circ} 21'$	$\lambda = 27^{\circ} 22'$	$\lambda = 27^{\circ} 23'$	$\lambda = 27^{\circ} 24'$
$\varphi = 52^{\circ} 23'$	$y = -27\ 135,04^m$ $x = -26\ 896,63^m$	$y = -26\ 000,36^m$ $x = -26\ 902,74^m$	$y = -24\ 865,68^m$ $x = -26\ 908,61^m$	$y = -23\ 731,00^m$ $x = -26\ 914,22^m$
$\varphi = 52^{\circ} 22'$	$y = -27\ 145,25^m$ $x = -28\ 750,98^m$	$y = -26\ 010,14^m$ $x = -28\ 757,09^m$	$y = -24\ 875,04^m$ $x = -28\ 762,96^m$	$y = -23\ 739,94^m$ $x = -28\ 768,56^m$
$\varphi = 52^{\circ} 21'$	$y = -27\ 155,47^m$ $x = -30\ 605,30^m$	$y = -26\ 019,93^m$ $x = -30\ 611,45^m$	$y = -24\ 884,40^m$ $x = -30\ 617,32^m$	$y = -23\ 748,87^m$ $x = -30\ 622,90^m$

Man kann diese Coordinaten in ihren Differenzen durch die Meridianbögen und Parallelbögen der Tafeln auf Seite [38]—[41] unseres Anhangs kontrollieren, z. B. in dem Meridian von $\lambda = 27^{\circ} 21'$ haben wir aus dem vorstehenden:

$$\begin{array}{lll} \varphi = 52^{\circ} 23' & x = -26\ 896,63^m & \Delta x = 1854,35^m \\ \varphi = 52^{\circ} 22' & x = -28\ 750,98^m & \Delta x = 1854,32^m \\ \varphi = 52^{\circ} 21' & x = -30\ 605,30^m & \end{array}$$

Nach der Tafel Seite [38] des Anhangs ist zwischen $52^{\circ} 20'$ und $52^{\circ} 30'$ der Meridianbogen $= 18\ 543,748^m$, also für 1 Minute $m = 1\ 854,37^m$, was mit den vorstehenden Werten Δx insofern genügend stimmt, als für genauere Rechnung schärfere Interpolation in der Tafel Seite [38] nötig wäre, und eine kleine Abweichung zwischen m und Δx auch in der Soldnerschen Projektion begründet ist.

Um auch die Ordinaten-Differenzen zu kontrollieren, könnte man die Längen-Grade der Tafel Seite [36]—[37] oder Seite [41] des Anhangs benützen, wobei aber viel zu interpolieren wäre; sicherer geht man zu Wege durch die unmittelbare Berechnung von 1 Längenminute nach § 36. S. 220, nämlich:

$$l' = \frac{N \cos \varphi}{\varrho'} = \frac{60 \cos \varphi}{[2]}$$

wo $\log \varrho' = 3.536\,2739$ ist, und $\log N$ aus der Hilfstafel Seite [20] oder $\log [2]$ auf Seite [33] des Anhangs gefunden wird, z. B. für $\varphi = 52^\circ 23'$ findet man $\log N = 6.805\,5547$ oder sofort $\log [2] = 8.508\,8704$ und damit nach vorstehender Formel $l' = 1\,134,69^m$, während die Ordinaten auf dem Parallel von $\varphi = 52^\circ 23'$ nach der obigen Tabelle geben:

$$\begin{array}{lll} \lambda = 27^\circ 21' & y = -27\,135,04^m & \Delta y = 1134,68^m \\ \lambda = 27^\circ 22' & y = -26\,000,36^m & \Delta y = 1134,68^m \\ \lambda = 27^\circ 23' & y = -24\,865,68^m & \Delta y = 1134,68^m \\ \lambda = 27^\circ 24' & y = -23\,731,00^m & \Delta y = 1134,68^m \end{array}$$

Diese Δy stimmen hinreichend mit dem vorhin berechneten $l' = 1134,69^m$.

Als zweites Beispiel dieser Art nehmen wir das in Preussen eingeführte Gradnetz für topographische Karten.

Das Netz der Meridiane und Parallelkreise für eine topographische Karte kann man auf zweierlei Art herstellen, entweder unmittelbar durch Konstruktion der Trapeze aus den Meridianbögen und den Parallelbögen, oder durch Einrechnen der Trapez-Eckpunkte in ein rechtwinkliges Coordinatensystem, das man zu Katastervermessungen, Stadtvermessungen und dergl. ohnehin hat.

Wir wollen dieses an dem Beispiele der zwei Messtischblätter der topographischen Abteilung der Landesaufnahme zeigen, auf welche die Stadt- und Feldmark von Hannover mit Linden fällt, wie in Fig. 2. S. 319 gezeichnet ist.

Die zwei Trapeze $ABCD$ und $CDEF$ liegen zwischen den Breiten $52^\circ 30'$, $52^\circ 24'$, $52^\circ 18'$ und zwischen den Längen $27^\circ 20'$ und $27^\circ 30'$ und haben Seitenlängen, welche in Tabellen verfügbar sind, auf Seite [41] des Anhangs, woraus wir entnehmen:

$$\begin{array}{lll} \varphi = 52^\circ 30' & AB = 11\,316,99^m & AC = BD = 11\,126,31^m \\ & CD = 11\,342,65^m & CE = DF = 11\,126,12^m \\ & EF = 11\,368,27^m & \end{array} \quad \left. \right\} \quad (1)$$

Dazu auch die Flächen:

$$ABCD = 126,0591 \text{ km}^2 \text{ und } CDEF = 126,3423 \text{ km}^2$$

Wenn man etwa diese Masse nicht vorrätig hat, aber wenigstens die Krümmungs-Halbmesser M für den Meridian und N für den Querbogen, so kann man die Trapezseiten ebenfalls berechnen, z. B.:

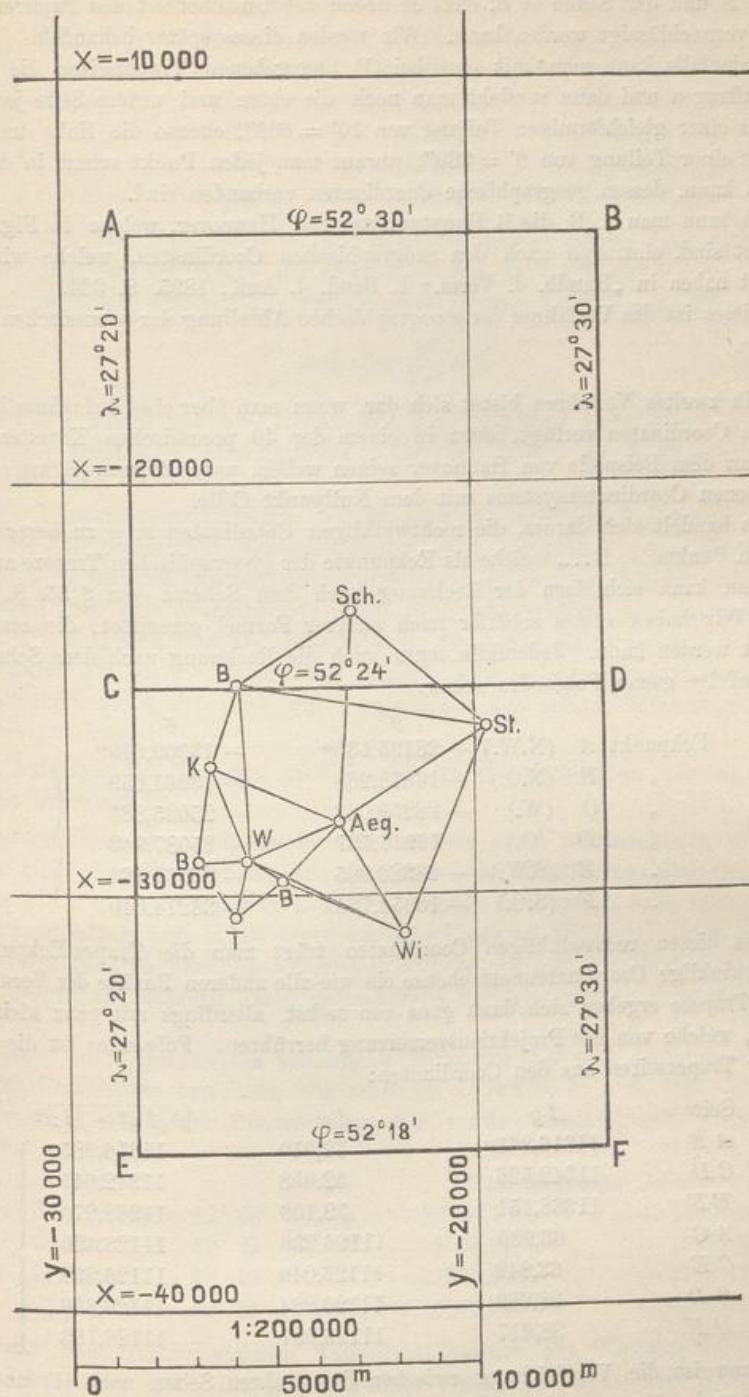
$$AC = \frac{M}{\varrho} 6' = \frac{360}{[1]} \quad (2)$$

$$AB = \frac{N}{\varrho} 10' \cos \varphi = \frac{600}{[2]} \quad (3)$$

wobei M oder [1] zur Mittelbreite von A und C , und N oder [2] zu der Breite von A und B selbst gehört.

Die Linien AB , CD , EF sind streng genommen ein wenig gekrümmt zu zeichnen, doch macht das im Massstab 1:25 000 für die preussischen Messtischblätter

Fig. 2.



so wenig aus, nämlich höchstens $0,1''$ als Querabweichung in der Mitte zwischen dem Bogen $A B$ und der Sehne $A B$, dass es neben der Unsicherheit des Papiereinganges u. s. w. vernachlässigt werden kann. Wir werden dieses später behandeln.

Jedenfalls kann man mit den bei (1) angegebenen Trapezseiten die Trapeze scharf auftragen und dann versieht man noch die obere und untere Seite jedes Trapezes mit einer gleichförmigen Teilung von $10' = 600''$, ebenso die linke und rechte Seite mit einer Teilung von $6' = 360''$, worauf man jeden Punkt scharf in das Blatt eintragen kann, dessen geographische Coordinaten vorhanden sind.

So kann man z. B. die 6 Hauptpunkte von Hannover, welche in Fig. 2. eingezeichnet sind, eintragen nach den geographischen Coordinaten, welche wir früher mitgeteilt haben in „Handb. d. Verm.“ I. Band, 4. Aufl., 1895, S. 324.

Dieses ist das Verfahren der topographischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme.

Ein zweites Verfahren bietet sich dar, wenn man über eine Aufnahme in rechtwinkligen Coordinaten verfügt, etwa in einem der 40 preussischen Katastersysteme, wie wir an dem Beispiele von Hannover zeigen wollen, unter Zugrundlegung des vorgeschriebenen Coordinatensystems mit dem Nullpunkt Celle.

Es handelt sich darum, die rechtwinkligen Coordinaten x, y zu berechnen für diejenigen Punkte A, B, \dots , welche als Eckpunkte der geographischen Trapeze auftreten.

Man kann sich dazu der Rechnung nach dem Schema von § 55, S. 309 bedienen. Wir haben etwas schärfer nach anderer Formel gerechnet, die erst später mitgeteilt werden kann. Jedenfalls muss auch die Rechnung nach dem Schema von S. 309 auf $1''$ genau Folgendes geben:

Eckpunkt	y	x	
A (N.W.)	— 28195,133 ^m	— 13909,649 ^m	
“ B (N.O.)	— 16878,268	— 13961,659	
“ C (W.)	— 28259,063	— 25035,885	
“ D (O.)	— 16916,537	— 25087,943	
“ E (S.W.)	— 28322,905	— 36161,934	
“ F (S.O.)	— 16954,754	— 36214,040	

Mit diesen rechtwinkligen Coordinaten trägt man die Trapez-Eckpunkte in das rechtwinklige Coordinatenetz ebenso ein wie alle anderen Punkte der Vermessung, und die Trapeze ergeben sich dann ganz von selbst, allerdings mit ganz kleinen Änderungen, welche von der Projektionsverzerrung herrühren. Folgendes ist die Berechnung der Trapezseiten aus den Coordinaten:

Seite	Δy	Δx	$\sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$	
AB	11316,865 ^m	52,010	11316,985 ^m	
CD	11342,526	52,058	11342,645	
EF	11368,151	52,106	11368,270	
AC	63,930	11126,236	11126,420	
CE	63,842	11126,049	11126,232	
BD	38,269	11126,284	11126,350	
DF	38,217	11126,097	11126,163	

Dann ist die Vergleichung zwischen den wahren Seiten nach (1) und deren Projektionen in (5):

Trapezseite	wahr	Projektion	Differenz	
<i>A B</i>	11316,99 ^m	11136,99 ^m	0,0 ^m	
<i>C D</i>	11342,65	11142,65	0,0	
<i>E F</i>	11368,27	11368,27	0,0	
<i>A C</i>	11126,31	11126,42	+ 0,11	
<i>C E</i>	11126,12	11126,23	+ 0,11	
<i>B D</i>	11126,31	11126,35	+ 0,04	
<i>D F</i>	11126,12	11126,16	+ 0,04	

Die Süd- und Nord-Seiten werden in der Projektion richtig dargestellt, wie es sein muss, dagegen die West- und Ost-Seiten sind in der Projektion zu gross um 0,11^m und um 0,04^m, was von der Projektionsverzerrung herrührt, nämlich:

$$\frac{y^2}{2r^2} AC \text{ oder } \frac{y^2}{2r^2} CE$$

Mit $y = 28200$ und $y = 16900$, und $\log r = 6.8040$ giebt dieses gerade die oben bei (6) erhaltenen Abweichungen 0,11^m und 0,04^m, womit alles rechnerisch sichergestellt ist.

Die Projektionsverzerrungen, welche nach (6) höchstens 1:100 000 betragen, sind in der topographischen Kartenzeichnung ganz unmerklich, es sind dieselben, welche auch in der viel feineren Katasterzeichnung schon vernachlässigt werden.

Wenn man den Trapezrahmen nach den rechtwinkligen Coordinaten (4) aufgetragen hat, bekommt man also innerhalb der äussersten Zeichenschärfe von 0,05^{mm} genau dasselbe wie bei der Behandlung mit den unmittelbaren Trapezseiten von (1), und im übrigen giebt sich auch die Vergleichung der beiden Verfahrungsarten aus dem bisherigen leicht:

I. Auftragen des Trapezes nach den Massen (1) giebt einen Rahmen für geographische Coordinaten.

II. Auftragen des Trapezes in dem Rahmen eines rechtwinkligen (Kataster-) Systemes giebt die Möglichkeit, alle Kataster- oder Stadtvermessungs-Coordinaten (z. B. die 114 Punkte in unserem I. Bande, „Handb. d. Verm. 4. Aufl. 1895“, S. 400 bis 401) unmittelbar auch in die topographische Karte zu übertragen, oder kurz alles Kataster- und Stadtvermessungs-Material in seinem eigenen Coordinatensystem auch für die Topographie lediglich durch geometrische Verkleinerung zu verwerten.

Ausser den 6 Eckpunkten von Fig. 2. haben wir auch noch drei andere Trapezecken nach Coordinaten berechnet, wie schon im I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 407 zu dem Netzbild S. 411 jenes Bandes angegeben wurde, nämlich, mit Wiederholung von *N W*:

Katastersystem Celle			
$L = 27^\circ 20'$, $\varphi = 52^\circ 30'$	$y = -28195,18^m$	$x = -13909,65^m$	
27 40	52 30	— 5561,31	— 13987,55
27 20	52 12	— 28386,66	— 47287,79
27 40	52 12	— 5599,09	— 47365,11

Wenn man trigonometrische Kataster-Aufnahmen zur Topographie benutzen will, so ist es das erste, die geographischen Netzlinien in solcher Weise einzurechnen, nicht bloss die eigentlichen Trapez-Ecken der topographischen Abteilung

der Landesaufnahme, sondern wie wir es bei Linden gethan haben, enger, etwa von Minute zu Minute.

Wenn die Flurkarten gar nicht mathematisch orientiert sind, (wie z. B. in einem grossen Teile der Provinz Hannover), ist es immer noch rationeller, durch einige rasch und rauh eingemessene und eingerechnete Rückwärtsschnitte zuvor das x, y -System in die Flurkarten hinein zu interpolieren, und dann nach der vorher genannten Methode zu verfahren, als sich nur auf das empirische Zusammenstimmen nach Wegrecken u. s. w. auf dem Messtische zu verlassen.

§ 58. Geographische Coordinaten φ, λ und konforme rechtwinklige Coordinaten x, Y .

Zwischen den kongruenten Coordinaten x, y und den konformen Coordinaten x, Y bestehen nach § 50. die einfachen Beziehungen:

$$x = x \quad y = Y - \frac{Y^3}{6r^2} \quad (1)$$

Wenn man daher φ und λ in x und y umwandeln kann und umgekehrt, so hat man auch φ und λ als Funktion von x und Y und umgekehrt; sei es, dass man nur die y und Y vermöge (1) zahlenmässig verwandelt, etwa mit einer Hilfstafel S. [45] des Anhangs, oder auch indem man die Einsetzung von Y statt y analytisch durchführt.

Wir wollen dieses thun und dazu die Formeln von § 55. nochmals hersetzen, aber um den Coordinaten-Nullpunkt ganz aus dem Spiele zu lassen mit der Annahme, dass die Abscissen x stets vom Äquator an gezählt werden. Bezeichnet man dann mit B den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ und mit x den Meridianbogen vom Äquator bis zur Fusspunktsbreite φ_1 , so hat man aus § 55. folgende Formeln (S. 304):

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho y^2}{2N_1^2} V_1^2 \operatorname{tang} \varphi_1 \\ \lambda = \frac{\varrho y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{\varrho y^3}{3N_1^3} \frac{\sin^2 \varphi_1}{\cos^3 \varphi_1} \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{\varrho y}{N_1} \operatorname{tang} \varphi_1 - \frac{\varrho y^3}{6N_1^3} \operatorname{tang} \varphi_1 (1 + 2 \operatorname{tang}^2 \varphi_1) \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho y^2}{2N_1^2} V_1^2 \operatorname{tang} \varphi_1 \\ \lambda = \frac{\varrho y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{\varrho y^3}{3N_1^3} \frac{\sin^2 \varphi_1}{\cos^3 \varphi_1} \\ \gamma = \frac{\varrho y}{N_1} \operatorname{tang} \varphi_1 - \frac{\varrho y^3}{6N_1^3} \operatorname{tang} \varphi_1 (1 + 2 \operatorname{tang}^2 \varphi_1) \end{array} \right\} \quad (4)$$

und die Umkehrung (S. 307 und S. 305):

$$\left. \begin{array}{l} x = B + \frac{\lambda^2 N}{2\varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi \\ y = \frac{N \lambda}{\varrho} \cos \varphi - \frac{N \lambda^3}{6\varrho^3} \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = B + \frac{\lambda^2 N}{2\varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi \\ y = \frac{N \lambda}{\varrho} \cos \varphi - \frac{N \lambda^3}{6\varrho^3} \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = B + \frac{\lambda^2 N}{2\varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi \\ y = \frac{N \lambda}{\varrho} \cos \varphi - \frac{N \lambda^3}{6\varrho^3} \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ \gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3\varrho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi \end{array} \right\} \quad (7)$$

Wenn man hier y durch Y nach (1) ersetzt, so giebt das bei (2) keine Änderung innerhalb der hier eingehaltenen Grössenordnung, und bei (3) und (4) gestaltet sich die Umformung leicht, so dass man im ganzen hat: