Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 58. Geographische Coordinaten und konforme rechtwinklige Coordinaten der Landesaufnahme, sondern wie wir es bei Linden gethan haben, enger, etwa von Minute zu Minute.

Wenn die Flurkarten gar nicht mathematisch orientiert sind, (wie z. B. in einem grossen Teile der Provinz Hannover), ist es immer noch rationeller, durch einige rasch und rauh eingemessene und eingerechnete Rückwärtsschnitte zuvor das x y-System in die Flurkarten hinein zu interpolieren, und dann nach der vorher genannten Methode zu verfahren, als sich nur auf das empirische Zusammenstimmen nach Wegecken u. s. w. auf dem Messtische zu verlassen.

§ 58. Geographische Coordinaten φ, λ und konforme rechtwinklige Coordinaten x Y.

Zwischen den kongruenten Coordinaten x, y und den konformen Coordinaten x, Y bestehen nach § 50. die einfachen Beziehungen:

$$x = x \qquad y = Y - \frac{Y^3}{6r^2} \tag{1}$$

Wenn man daher φ und λ in x und y umwandeln kann und umgekehrt, so hat man auch φ und λ als Funktion von x und Y und umgekehrt; sei es, dass man nur die y und Y vermöge (1) zahlenmässig verwandelt, etwa mit einer Hilfstafel S. [45] des Anhangs, oder auch indem man die Einsetzung von Y statt y analytisch durchführt.

Wir wollen dieses thun und dazu die Formeln von § 55. nochmals hersetzen, aber um den Coordinaten-Nullpunkt ganz aus dem Spiele zu lassen mit der Annahme, dass die Abscissen x stets vom Äquator an gezählt werden. Bezeichnet man dann mit B den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ und mit x den Meridianbogen vom Äquator bis zur Fusspunktsbreite φ_1, so hat man aus § 55. folgende Formeln (S. 304):

$$\text{kongruent}\left\{\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_1 - \frac{\varrho\, y^2}{2\,N_1^2}\, V_1^2\, tang\, \varphi_1 && (2)\\
\lambda &= \frac{\varrho\, y}{N_1 \cos\varphi_1} - \frac{\varrho\, y^3}{3\,N_1^3}\,\frac{\sin^2\varphi_1}{\cos^3\varphi_1} && (3)\\
\gamma &= \frac{\varrho\, y}{N_1}\, tang\, \varphi_1 - \frac{\varrho\, y^3}{6\,N_1^3}\, tang\, \varphi_1\,(1 + 2\, tang^2\, \varphi_1) && (4)
\end{aligned}\right.$$

und die Umkehrung (S. 307 und S. 305):

$$\text{kongruent}\left\{\begin{aligned}
x &= B + \frac{\lambda^2\, N}{2\,\varrho^2} \sin\varphi \cos\varphi && (5)\\
y &= \frac{N\lambda}{\varrho} \cos\varphi - \frac{N\,\lambda^3}{6\,\varrho^3} \sin^2\varphi \cos\varphi && (6)\\
\gamma &= \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3\,\varrho^2} \sin\varphi \cos^2\varphi && (7)
\end{aligned}\right.$$

Wenn man hier y durch Y nach (1) ersetzt, so giebt das bei (2) keine Änderung innerhalb der hier eingehaltenen Grössenordnung, und bei (3) und (4) gestaltet sich die Umformung leicht, so dass man im ganzen hat:

$$\text{konform}\left\{\begin{aligned}
&\varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho\, Y^2}{2\, N_1^2} V_1^2 \, tang\, \varphi_1 && (8)\\
&\lambda = \frac{\varrho\, Y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{\varrho\, Y^3}{6\, N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2\, tang^2\, \varphi_1) && (9)\\
&\gamma = \frac{\varrho\, Y}{N_1} tang\, \varphi_1 - \frac{\varrho\, Y^3}{3\, N_1^3} \frac{tang\, \varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} && (10)
\end{aligned}\right.$$

Bei der Umwandlung der zweiten Gruppe (5)—(7) bleibt auch wieder x und ausserdem γ unverändert, und bei (6) verfährt man in üblicher Weise genähert, wodurch man rasch erhält:

$$\text{konform}\left\{\begin{aligned}
&x = B + \frac{\lambda^2 N}{2\, \varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi && (11)\\
&Y = \frac{N\, \lambda}{\varrho} \cos \varphi + \frac{N\, \lambda^3}{6\, \varrho^3} \cos \varphi \cos 2\, \varphi && (12)\\
&\gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3\, \varrho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi && (13)
\end{aligned}\right.$$

Diese Formeln (8)—(10) und (11)—(13) stimmen in erster Näherung überein mit den Gaussschen Formeln nach Wittstein und Schreiber; die letzteren genaueren Formeln haben noch höhere Glieder, welche wir erst in einem späteren Kapitel finden werden.

Es ist in dem Gange der Rechnung begründet, dass bei λ und γ alles in der Fusspunktsbreite φ_1 ausgedrückt ist und bei y und γ alles in der Breite φ des Punktes selbst; aber wenn mit φ begonnen wird, kann man es auch zu λ und γ benützen, und andererseits, wenn $x - B$ berechnet ist, hat man auch φ_1, und deshalb mögen zur Kontrolle auch noch folgende Formel-Gruppen erwünscht sein, zuerst zu der Gruppe (8)—(10):

$$\text{konform}\left\{\begin{aligned}
&\varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho\, Y^2}{2\, N_1^2} V_1^2 \, tang\, \varphi_1 && (14)\\
&\lambda = \frac{\varrho}{N_1} \frac{Y}{\cos \varphi} - \frac{\varrho}{6} \frac{Y^3}{N_1^3} \frac{\cos 2\, \varphi}{\cos^3 \varphi} && (15)\\
&\gamma = \frac{\varrho}{N_1} Y\, tang\, \varphi + \frac{\varrho\, Y^3}{6\, N_1^3} \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} && (16)
\end{aligned}\right.$$

und andererseits zu der Gruppe (11)—(13):

$$\text{konform}\left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&x = B + \frac{\lambda^2 N}{2\, \varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi\\
&\varphi_1 = \varphi + \frac{V^2 \lambda^2}{2\, \varrho} \sin \varphi \cos \varphi
\end{aligned}\right\} && (17)\\
&Y = \frac{N \lambda}{\varrho} \cos \varphi_1 + \frac{N\, \lambda^3}{6\, \varrho^3} \cos^3 \varphi_1 (1 + 2\, tang^2\, \varphi_1) && (18)\\
&\gamma = \frac{\lambda}{\varrho} \sin \varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6\, \varrho^2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 && (19)
\end{aligned}\right.$$

Nach den vorstehenden Formeln (11) und (12) bezw. (17) und (18) haben wir für die Übungsmessungen in der Gegend von Hannover und namentlich Hildesheim, Salzdetfurt, ein Coordinatensystem angelegt, dessen x-Axe der 28^{te} Längengrad ist, mit Zählung der x vom Äquator der Erde an, aber mit Abkürzung um rund $5\,000\,000^m$. Die Längen λ stehen daher zu den Längen L der Landesaufnahme in der Beziehung $\lambda = L - 28°$.

Wir wollen die Rechnung für einen Punkt nach den Formeln (11) und (12) hier hersetzen:

$$\begin{array}{ll} \text{Ägidius } L = 27°\,24'\,24{,}6290'' & \varphi = 52°\,22'\,14{,}9611'' \\ L_0 = 28° & \varphi_0 = 52°\,20' \\ \hline \lambda = -\,0°\,35'\,35{,}3710'' & \varDelta\varphi = +\quad 2'\,14{,}9611'' \\ \lambda = -\quad 2135{,}3710'' & \varDelta\varphi = \quad 134{,}9611'' \end{array}$$

Aus dem Anhang Seite [33] entnimmt man für $\varphi = 52°\,22'\,15''$ den Wert $log\,[2] = log\,(\varrho : N) = 8.508\,8707$, und für die Mittelbreite $52°\,21'\,7''$ den Wert $log\,[1] = 8.509\,9585$,

$$\begin{array}{lrr} \text{aus Seite [38] für } \varphi = 52°\,22' \;.\;.\;.\;.\;.\; & B_0 = & 5\,799\,836{,}593 \\ \text{logarithmisch auszurechnen } \varDelta\varphi : [1] \;.\;.\;. & = & 4\,171{,}095 \\ \text{"} \qquad\qquad \text{"} \qquad \dfrac{\lambda^2}{2\varrho}\dfrac{sin\,\varphi\,cos\,\varphi}{[2]} \;. & = & 165{,}598 \\ \hline & X = & 5\,804\,173{,}286 \end{array} \qquad (20)$$

Weiter wird logarithmisch ausgerechnet nach der Formel (12):

$$\begin{array}{lr} \dfrac{N\lambda\,cos\,\varphi}{\varrho} = \dfrac{\lambda\,cos\,\varphi}{[2]} = \;.\;.\;.\;.\;. & -\,403\,94{,}557^m \\ +\,\dfrac{\lambda\,cos\,\varphi}{[2]}\dfrac{\lambda^2}{6\varrho^2}\,cos\,2\,\varphi \;.\;.\;.\;.\;. + & 0{,}184^m \\ \hline \text{konform } Y = & -\,403\,94{,}373^m \end{array} \qquad (21)$$

Konforme Coordinaten Y und x in dem System mit $L = 28°$ und $\varphi = 0°$.

Punkt	Geographische Coordinaten L	Geographische Coordinaten φ	Rechtw. konf. Coordinaten Y	Rechtw. konf. Coordinaten x	Höhe über N. N.
Ägidius	27° 24′ 24,6290″	52° 22′ 14,9611″	— 40 394,37ᵐ	5 000 000ᵐ + 804 173,29	125,37ᵐ Kn.
Wasserturm	27 22 25,0168	52 21 49,9080	— 42 663,69	+ 803 418,07	111,96 R.
Wehrstedt, Kirchturm	27 40 45,8901	52 2 40,3138	— 21 992,64	+ 767 753,55	143,98 Kn.
Sauberg, Pyramide .	27 42 30,3539	52 3 31,0969	— 19 995,69	+ 769 314,59	317,19 Pf.
Detfurth, Kirchturm .	27 41 16,75	52 4 29,21	— 21 390,13	+ 771 116,35	123,40 Unt.
Wesseln, Pyramide .	27 43 56,5389	52 4 37,5592	— 18 346,32	+ 771 362,23	293,27 Pf.
Wesseln, Kirchturm .	27 42 0,37	52 5 4,64	— 20 554,95	+ 772 207,79	111,50 Kn.
Gross-Düngen, Pyr. .	27 41 4,4376	52 5 8,8156	— 21 619,28	+ 772 341,35	195,01 Pf.
Gross-Düngen, Kircht.	27 41 15,03	52 5 46,53	— 21 412,60	+ 773 505,02	121,84 Kn.
Klein-Düngen, Pyr. .	27 42 44,6860	52 5 22,8490	— 19 708,97	+ 772 767,11	142,35 Pf.
Heinde, Pyramide . .	27 43 34,8287	52 6 40,5926	— 18 745,39	+ 775 166,06	146,97 Pf.
Heinde, Kirchturm .	27 42 24,25	52 6 2,78	— 20 093,05	+ 774 002,68	
Lechstedt, Kirchturm .	27 41 39,3608	52 6 54,7459	— 20 940,62	+ 775 612,21	163,04 Kn.
Breinum, Pyramide .	27 38 41,4808	52 2 39,6577	— 24 363,44	+ 767 744,30	228,90 Pf.
Almstedt, Pyramide .	27 37 43,3101	52 3 47,2945	— 25 461,30	+ 769 840,10	359,15 Pf.
Welfenhöhe, Pyramide	27 39 35,04	52 4 1,98	— 23 330,93	+ 770 283,52	292,54 Ob.
Hammberg, Pyramide .	27 38 58,3354	52 4 44,5595	— 24 023,68	+ 771 602,73	306,33 Pf.
Eggenstedt, Kirchturm	27 39 42,7418	52 6 11,6524	— 23 165,55	+ 774 290,28	117,22 Kn.
Bodenburg, Schlosst. .	27 40 33,2205	52 1 41,2544	— 22 242,21	+ 765 929,45	186,91 Kn.

Bei den Höhenangaben bedeutet Kn. = Knopfmitte, R. = Rand des Turmes, Pf. = Pfeileroberfläche (= Oberfläche des trigonometrischen Signalsteins), Unt. = Unterer Dachrand, Ob. = Oberer Rand = höchster Punkt.

Die Coordinatenrechnung ist nur auf Centimeter geführt, also mit $\pm 0{,}01^m$, was für den vorliegenden Zweck genügte.

Rechnet man zur Kontrolle von (21) auch noch nach den Formeln (17) und (18), so findet man $\varphi_1 = 52° \, 22' \, 20{,}3192''$ und dann $Y = -403\,93{,}196 - 1{,}174 = -403\,94{,}370^m$, was mit dem früheren (21) hinreichend stimmt.

Dieses ist konformes Y, und wenn man kongruentes y haben will, so hat man noch zu rechnen $\dfrac{Y^3}{6\,r^2} = 0{,}270^m$, was zu dem Vorigen giebt kongruent $y = -403\,94{,}100^m$.

Also in Zusammenfassung, zugleich für Wasserturm:

	kongruent y	konform Y	$X - 5000\,000 = x$
Ägidius	$-40394{,}10^m$	$-40394{,}37^m$	$+804173{,}29^m$
Wasserturm	$-42663{,}42$	$-42663{,}69$	$+803418{,}07$

Diese Y und x sind in der Tabelle S. 324 eingesetzt.

Auf beschränktem Gebiete kann man die x noch weiter kürzen, etwa durch konstantes Weglassen von $700\,000^m$.

§ 59. Die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme des Deutschen Reiches.

Eine Übersicht der Deutschen rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, welche zugleich ein gutes Stück Geschichte der Deutschen Vermessungen überhaupt vor Augen führt, haben wir in Fig. 1. S. 326 gebildet.

Im Folgenden haben wir die aus verschiedenen Quellen gesammelten geschichtlichen Angaben über die verschiedenen Landes- und Provinzial-Coordinaten-Systeme zusammengestellt, obgleich unsere Theorieen teilweise noch nicht soweit gediehen sind, um alles im Einzelnen zu verstehen. In einem späteren Kapitel wird weiter darüber zu handeln sein, inzwischen genügt die Kenntnis der rechtwinkligen kongruenten (Soldnerschen) Coordinaten (§ 46.) und der rechtwinkligen konformen Coordinaten (§ 50.) zum allgemeinen Verständnis, jedenfalls in geschichtlicher Beziehung.

Es ist hier auch nochmals an die geschichtlichen Abrisse zu erinnern, die wir schon im I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 479—551 gegeben haben. Auch sind die geschichtlichen Abschnitte in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen, 1881", zuzuziehen.

Über die rechtwinkligen geodätischen Coordinaten im Allgemeinen ist vorauszuschicken, dass dieselben ohne Zweifel französischen Ursprungs sind, sie wurden schon 1734 von Cassini angewendet, zuerst wohl lediglich als zusammengesetzte rechtwinklige ebene Coordinaten und schrittweise auf kurze Entfernungen geradezu in der Form von ebenen Coordinaten behandelt, und Clairaut erkannte darin den unwillkürlich betretenen Weg zur geodätischen Linie (Helmert, höhere Geodäsie I, S. 240).

Soldner hat in der monatlichen Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde 11. Band 1805, S. 7—23 eine Abhandlung über die kürzeste Linie auf dem Sphäroide geschrieben, in welcher er auf S. 15—17 auch auf die rechtwinkligen Coordinaten kommt, und als „*gewöhnliche* Methode den Perpendikel und