



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 60. Das sphärische Polar-Dreieck

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

die zeichnerische Darstellung der Vermessungs-Ergebnisse, und aus diesem Grunde ist der Wert und die Dauer einer Landesvermessung zum grössten Teil durch die mehr oder weniger gute Wahl eines Coordinaten-Systems bedingt.

Eine für die ganze Erde zu Land und zu Wasser gültige Art der Punktbestimmung durch geographische Coordinaten (geogr. Breiten und Längen) ist auch bei den Landesvermessungen immer angewendet worden, und in manchen Vermessungen wurden die geographischen Netzlinien für Längen und Breiten als einziger mathematischer Zusammenhalt genommen.

Allein diese geographischen Netzlinien liegen dem Feld- und Landmesser, der im Kleinen misst, zu fern, sie passen nicht in sein tägliches Geschäft mit rechten Winkeln, denn die Meridiane eines Landes sind zwar für das Feldmessen als Gerade zu betrachten, aber sie sind unter sich nicht parallel, und die Parallelkreise sind nicht gerade.

Der Feldmesser muss *rechtwinklige* Coordinaten haben, und zwar solche, die auf die Erdkrümmung Rücksicht nehmen und den Übergang zwischen der Kleinvermessung und den höheren geodätischen Rechnungen mit geographischen Coordinaten vermitteln.

In dieser Beziehung haben die süddeutschen Landesvermessungen, namentlich Bayern und Württemberg unter Soldner und Bohnenberger am Anfang dieses Jahrhunderts bahnbrechend gewirkt, die Systeme jener Vermessungen waren nachahmungswert, so lange man nichts Besseres hatte.

Das ist nun aber der Fall seit 1866, da die Gauss'sche konforme Projektion durch Wittstein-Schreiber der Öffentlichkeit übergeben ist; und im nächsten Jahrhundert wird die konforme Projektion nach Gauss'schem Prinzip ebenso unbestritten als zweckmässigste für Landesvermessungen und Katasteraufnahmen gelten, wie heute die vor kaum 2 Jahrzehnten noch für „unausführbar“ erklärte Gauss'sche Ausgleichung der Kataster-Dreiecksmessungen.

Zwischenbemerkung.

Mit den geographischen Coordinaten sind wir so weit in der Theorie der Geodäsie gelangt, als zum praktischen Verständnis unserer deutschen Landesvermessungen im Ganzen nötig ist.

Für weitergehende Zwecke ist nun der richtige Weg zur geodätischen Linie vorgezeigt, welche in unserem nächsten Kapitel VI. behandelt werden wird.

Wenn nun trotzdem noch in diesem Kapitel V. eine Anzahl rein sphärischer Aufgaben abgehandelt wird, so hat das den Zweck der Vorbereitung von späteren sphäroidischen Aufgaben.

Eine Aufgabe spielt dabei eine durchlaufende Rolle, nämlich Herstellung der Beziehungen zwischen den geographischen Coordinaten zweier Punkte einerseits und der Entfernung nebst den Azimuten ihrer Verbindungslinie andererseits, oder umgekehrt, in verschiedenem Zusammenhang.

Wir haben dieses früher „Hauptaufgabe der höheren Geodäsie“ genannt, werden aber nun das mehr bezeichnende Wort „*Polardreieck*“ anwenden.

Das Polardreieck spielt in der Geodäsie eine gleich wichtige Rolle wie das astronomische oder nautische Dreieck (Pol-Zenit-Stern) in der praktischen Astronomie. Auch eine von Gauss gebrauchte Bezeichnung T oder t für das Azimut und dann auch für Richtungswinkel der Geodäsie scheint auf jene Verwandtschaft hinzudeuten, indem das Azimut in dem geodätischen Polardreieck dem Stundenwinkel t des astronomischen Dreiecks entspricht.

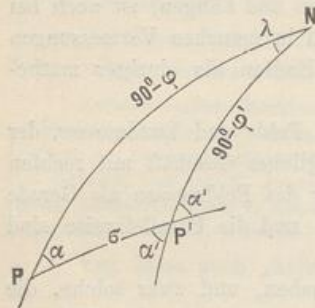
§ 60. Das sphärische Polar-Dreieck.

Wir knüpfen nochmals an den früheren § 56. an und setzen auch die Fig. 1. von S. 312 nochmals her.

Jordan, Handb. d. Vermessungskunde. 4. Aufl. III. Bd.

Zwei Punkte P und P' haben die geographischen Breiten φ und φ' und zwischen sich den geographischen Längenunterschied λ . Der Verbindungsbogen PP' als grösster Kreisbogen hat den Wert σ als Centriwinkel am Erdmittelpunkt und die Azimute α und α' an seinen Endpunkten. Der Halbmesser der Kugel, auf welcher das Dreieck $PP'N$ liegend angenommen ist, kommt nicht in Betracht.

Fig. 1.



Unsere Aufgabe wird eine zweifache sein:

entweder ist φ , φ' , λ gegeben und

σ , α , α' gesucht

oder es ist φ , σ , α gegeben und

φ' , λ , α' gesucht.

Da wir uns hier nur mit der rein *sphärischen* Auflösung der fraglichen Aufgaben beschäftigen, und da wir einsehen, dass es sich in beiden Fällen nur darum handelt, ein sphärisches Dreieck aus zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel aufzulösen, liegen im Grundsatz keine Schwierigkeiten vor, und es handelt sich also nur darum, die verschiedenen Auflösungs-Formen, welche die sphärische Trigonometrie für unsern Fall bietet, zu betrachten, und für unsere Zwecke zurecht zu legen (wozu Gauss in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“, erste Abhandlung, 1843, art. 16. und 17. die Wege gezeigt hat).

Ehe wir zu unseren Formel-Entwicklungen und zur numerischen Anwendung von sphärischen Formeln übergehen, wollen wir zwei scharf (mit 10 stelligen Logarithmen) berechnete Beispiele voraus schicken, welche in verschiedener Weise als Normal-Beispiele dienen können:

Kleines sphärisches Normal-Beispiel.

(Bezeichnungen nach Fig. 1.)

$$\begin{array}{rcl}
 \varphi = 49^{\circ} 30' 0'' & \varphi' = 50^{\circ} 30' 0'' & \lambda = 1^{\circ} 0' 0'' \\
 \varphi_0 = \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^{\circ} 0' 0'' & \frac{\varphi' - \varphi}{2} = 0^{\circ} 30' 0'' & \frac{\lambda}{2} = 0^{\circ} 30' 0'' \\
 \alpha_0 = \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^{\circ} 44' 0.2384'' & \alpha' - \alpha = 0^{\circ} 45' 57.89393'' & \\
 \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^{\circ} 22' 58.9470'' & \frac{\sigma}{2} = 0^{\circ} 35' 39.74093'' & \\
 \hline
 \alpha' = 33^{\circ} 6' 59.1854'' & \sigma = 1^{\circ} 11' 19.48186'' & \\
 \alpha = 32^{\circ} 21' 1.2914'' & \sigma = 4279.48186'' &
 \end{array} \quad (1)$$

Grosses sphärisches Normal-Beispiel.

(Bezeichnungen nach Fig. 1.)

$$\begin{array}{rcl}
 \varphi = 45^{\circ} 0' 0'' & \varphi' = 55^{\circ} 0' 0'' & \lambda = 10^{\circ} 0' 0'' \\
 \varphi_0 = \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^{\circ} 0' 0'' & \frac{\varphi' - \varphi}{2} = 5^{\circ} 0' 0'' & \frac{\lambda}{2} = 5^{\circ} 0' 0'' \\
 \alpha_0 = \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^{\circ} 49' 54.6437'' & \alpha' - \alpha = 7^{\circ} 41' 51.67100'' & \\
 \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 3^{\circ} 50' 55.8355'' & \frac{\sigma}{2} = 5^{\circ} 55' 51.32153'' & \\
 \hline
 \alpha' = 36^{\circ} 40' 50.4792'' & \sigma = 11^{\circ} 51' 42.64306'' & \\
 \alpha = 28^{\circ} 58' 58.8082'' & \sigma = 42702.64306'' &
 \end{array} \quad (2)$$

I. Gegeben $\varphi, \varphi', \lambda$. Gesucht σ, α, α' .

Ia. Die Gauss'schen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie.

Wenn man die Gauss'schen bzw. Neper'schen Gleichungen von § 27. S. 165 auf unseren Fall anwendet, so bekommt man, ebenso wie schon bei (1) § 56. S. 312 mit den Abkürzungen φ_0 und α_0 für die Mittelwerte, folgendes:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\sigma}{2} \sin \alpha_0 &= \cos \varphi_0 \sin \frac{\lambda}{2} \\ \sin \frac{\sigma}{2} \cos \alpha_0 &= \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \\ \cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2} &= \sin \varphi_0 \sin \frac{\lambda}{2} \\ \cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} &= \cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wenn man die erste und zweite, dann die dritte und vierte dieser Gleichungen dividiert, und zur Abkürzung für das folgende, die Zeichen Z und N , Z' und N' für die Zähler und Nenner der entstehenden Brüche einführt, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha_0 &= \frac{\cos \varphi_0 \sin \frac{\lambda}{2}}{\sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2}} = \frac{Z}{N} \\ \sin \frac{\sigma}{2} &= \frac{Z}{\sin \alpha_0} = \frac{N}{\cos \alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\alpha' - \alpha}{2} &= \frac{\sin \varphi_0 \sin \frac{\lambda}{2}}{\cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2}} = \frac{Z'}{N'} \\ \cos \frac{\sigma}{2} &= \frac{Z'}{\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}} = \frac{N'}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir nach (1):

$$\varphi = 49^\circ 30' 0'' \quad \varphi' = 50^\circ 30' 0'' \quad \lambda = 1^\circ 0' 0'' \quad (6)$$

also $\varphi_0 = 50^\circ 0' 0''$, $\frac{\varphi' - \varphi}{2} = 0^\circ 30' 0''$, $\frac{\lambda}{2} = 0^\circ 30' 0''$

Die logarithmische Rechnung giebt:

$\log Z$	7.748 9093·6	$\log Z'$	7.825 0958·3
$\log N$	7.940 8253·2	$\log N'$	9.999 9669·3
$\log \tan \alpha_0$	9.808 0840·4	$\log \tan \frac{\alpha' - \alpha}{2}$	7.825 1289·0
$\log \sin \frac{\sigma}{2}$	8.015 9282·7	$\log \cos \frac{\sigma}{2}$	9.999 9766·3
$\alpha_0 = 32^\circ 44' 0,238''$		$\frac{\sigma}{2} = 0^\circ 35' 39,741''$	
$\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,947''$		$\sigma = 1^\circ 11' 19,482''$	
$\alpha' = 33^\circ 6' 59,185''$			
$\alpha = 32^\circ 21' 1,291''$			

(7)

Von den beiden Bestimmungen für $\frac{\sigma}{2}$, nämlich aus $\sin \frac{\sigma}{2}$ und aus $\cos \frac{\sigma}{2}$ ist in diesem Falle, da σ klein ist, nur die erste scharf, während die zweite aus \cos , nur als summarische Probe benützt werden kann.

Ib. Einzelformeln für σ , α und α' .

Zur Bestimmung von σ allein dient die Cosinusformel S. 164:

$$\cos \sigma = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos \lambda \quad (8)$$

Da aber in unseren Fällen immer σ klein ist, kann man nicht geradezu nach $\cos \sigma$ rechnen; indessen kann man die vorstehende Formel leicht umformen, indem man setzt:

$$\cos \sigma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} \quad \text{und} \quad \cos \lambda = 1 - 2 \frac{\sin^2 \lambda}{2}$$

Damit findet man leicht:

$$\sin \frac{\sigma}{2} = \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \cos \varphi \cos \varphi' \sin^2 \frac{\lambda}{2}} \quad (9)$$

Man rechnet dann mit einem Hilfswinkel μ ähnlich wie bei der Bestimmung einer Hypotenuse aus zwei Katheten:

$$\tan \mu = \frac{\sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}}{\sin \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \varphi \cos \varphi'}}$$

$$\sin \frac{\sigma}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}}{\sin \mu} \quad \text{oder} \quad = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \varphi \cos \varphi'}}{\cos \mu}$$

Unser kleines Normal-Beispiel (1) S. 338 giebt:

$\log \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}$	7.940 8418.6	$\left. \begin{array}{l} \mu = 57^\circ 16' 11,981'' \\ \frac{\sigma}{2} = 0^\circ 35' 39,741'' \\ \sigma = 1^\circ 11' 19,482'' \end{array} \right\} \quad (10)$
$\log \sin \frac{\lambda}{2} \sqrt{\dots}$	7.748 8693.3	
$\log \tan \mu$	0.191 9725.3	
$\log \sin \frac{\sigma}{2}$	8.015 9282.7	

Auch für die Azimute α und α' giebt die sphärische Trigonometrie unmittelbare Lösungen, nämlich nach den *cotg*-Formeln von S. 164:

$$\cotg \alpha = \frac{\tan \varphi' \cos \varphi}{\sin \lambda} - \sin \varphi \cotg \lambda \quad (11)$$

$$\cotg (\alpha' \pm 180^\circ) = \frac{\tan \varphi \cos \varphi'}{\sin \lambda} - \sin \varphi' \cotg \lambda \quad (12)$$

Unser grosses Normal-Beispiel (2) giebt hierfür folgende Anwendung:

$$\begin{aligned} \varphi &= 45^\circ 0', & \varphi' &= 55^\circ 0', & \lambda &= 10^\circ 0' \\ \cotg \alpha &= 5,815\,512\,455 - 4,010\,201\,831 = 1,805\,310\,624 \\ \log \cotg \alpha &= 0.256\,5519.4 & \alpha &= 28^\circ 58' 58,808'' \end{aligned} \quad (13)$$

Dagegen giebt das kleine Normal-Beispiel (1):

$$\begin{aligned}\varphi &= 49^\circ 30', & \varphi' &= 50^\circ 30', & \lambda &= 1^\circ 0' \\ \cotg \alpha &= 45,142\,3983 - 43,563\,6286 = 1,578\,7697 \\ \log \cotg \alpha &= 0.198\,3187\,8 & \alpha &= 32^\circ 21' 1,290''\end{aligned}\quad (13\,a)$$

Wenn φ und φ' nahezu gleich sind, und λ klein ist, so geben die Formeln (11) und (12) keine scharfen Bestimmungen, weil dabei eine Differenz zweier nicht sehr verschiedener Werte auszurechnen ist, wie (13 a) mit 45,14) ... — 43,56 ... deutlich zeigt.

Man kann noch manche andere Auflösungs-Formen für die vorgelegte erste Aufgabe I. finden, wie sich aus der Analogie mit der zweiten Aufgabe II. ergeben wird, zu der wir nun übergehen.

II. Gegeben φ, σ, α . Gesucht $\varphi', \lambda, \alpha'$.

II a. Auflösung durch die Gauss'schen Gleichungen.

Die Anwendung der Gauss'schen bzw. Neper'schen Gleichungen von S. 165 auf unseren Fall giebt:

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\alpha' + \lambda}{2} &= \frac{\sin \frac{90^\circ - \varphi + \sigma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{90^\circ - \varphi - \sigma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{Z}{N} \\ \sin \frac{90^\circ - \varphi'}{2} &= \frac{Z}{\sin \frac{\alpha' + \lambda}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\alpha' + \lambda}{2}} \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\alpha' - \lambda}{2} &= \frac{\cos \frac{90^\circ - \varphi + \sigma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{90^\circ - \varphi - \sigma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{Z'}{N'} \\ \cos \frac{90^\circ - \varphi'}{2} &= \frac{Z'}{\sin \frac{\alpha' - \lambda}{2}} = \frac{N'}{\cos \frac{\alpha' - \lambda}{2}} \end{aligned} \right\} (15)$$

Bei unserem kleinen Normal-Beispiel (1) ist:

$$\text{Gegeben } \varphi = 49^\circ 30' 0'' \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,482'' \quad \alpha = 32^\circ 21' 1,291''$$

Man hat also zur Anwendung von (14) und (15):

$$\frac{90^\circ - \varphi + \sigma}{2} = 20^\circ 50' 39,741'' \quad \frac{\alpha}{2} = 16^\circ 10' 30,646''$$

$$\frac{90^\circ - \varphi - \sigma}{2} = 19^\circ 39' 20,259''$$

$\log Z$	8.996 1858-3	$\log Z'$	9.415 5449-8
$\log N$	9.509 2708-3	$\log N'$	9.956 3857-0
$\log \tan \frac{\alpha' + \lambda}{2}$	9.486 9150-0	$\log \tan \frac{\alpha' - \lambda}{2}$	9.459 1592-8
$\log \sin \frac{90^\circ - \varphi'}{2}$	9.528 8096-8	$\log \cos \frac{90^\circ - \varphi'}{2}$	9.973 6708-5

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha' + \lambda}{2} &= 17^\circ 3' 29,592'' \\
 \frac{\alpha' - \lambda}{2} &= 16^\circ 3' 29,592'' \\
 \alpha' &= 33^\circ 6' 59,184'' \\
 \lambda &= 1^\circ 0' 0,000''
 \end{aligned}
 \quad
 \left.
 \begin{aligned}
 \frac{90^\circ - \varphi'}{2} &= 19^\circ 45' 0,000'' \\
 90^\circ - \varphi' &= 39^\circ 30' 0,000'' \\
 \varphi' &= 50^\circ 30' 0,000''
 \end{aligned}
 \right\} \quad (15a)$$

IIb. Einzel-Formeln für φ' , α' und λ .

Zur Bestimmung von φ' aus φ , σ und α hat man die Cosinus-Formel S. 164 und für α' und λ hat man je eine der Cotangenten-Formeln (9) S. 164 anzuwenden. Man erhält auf diesem Wege folgende drei Auflösungen:

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \cos \sigma + \cos \varphi \sin \sigma \cos \alpha \quad (16)$$

$$\cotg \alpha' = \frac{\cos \sigma \cos \alpha - \sin \sigma \tan \varphi}{\sin \alpha} \quad (17)$$

$$\cotg \lambda = \frac{\cotg \sigma \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (18)$$

Zur Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel haben wir:

$$\text{Gegeben } \varphi = 49^\circ 30' 0'', \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,482'', \quad \alpha = 32^\circ 21' 1,291''$$

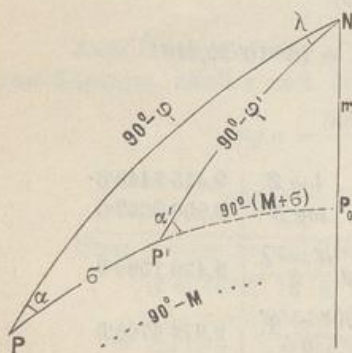
Die Ausrechnung nach (16), (17) und (18) giebt:

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi' &= 0,760\,2423 + 0,011\,3823 = 0,771\,6246 \\
 \log \sin \varphi' &= 9,887\,4061 & \varphi' &= 50^\circ 30' 0,00'' \\
 \cotg \alpha' &= 1,578\,4299 - 0,045\,3947 = 1,533\,0352 \\
 \log \cotg \alpha' &= 0,185\,5521 & \alpha' &= 33^\circ 6' 9,19'' \\
 \cotg \lambda &= \frac{31,297\,9570 - 0,642\,3847}{\sin \alpha} = \frac{30,655\,5723}{\sin \alpha} \\
 \log \cotg \lambda &= 1,758\,0785 & \lambda &= 1^\circ 0' 0,00''
 \end{aligned} \quad (19)$$

An diesen drei Auflösungs-Formeln ist nichts auszusetzen; sie geben φ' , α' und λ einzeln mit gewöhnlicher Schärfe. Der von manchen Rechnern gescheute mehrfache Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen und umgekehrt, kann nötigenfalls durch Benützung von Additions- und Subtraktions-Logarithmen vermieden werden.

IIc. Rechtwinklige Projektion des Nordpols auf die Seite σ .

Fig. 2.
Hilfswinkel M und m .



In Fig. 2., welche etwas anders gezogen ist als die frühere Fig. 1., aber im wesentlichen dasselbe darstellt, ist von dem Nordpol N eine Senkrechte NP_0 auf die verlängerte PP' gefällt, wodurch sowohl die Länge m dieser Senkrechten selbst, als auch die Länge PP_0 bestimmt ist, welche wir mit $90^\circ - M$ bezeichnen wollen.

Da nun das grosse rechtwinklige Dreieck PNP_0 durch unsere gegebenen φ und α vollständig bestimmt ist, und da durch Abtragen von $PP' = \sigma$ auf PP_0 auch der Punkt P' , und damit das zweite kleinere rechtwinklige Dreieck $P'NP_0$, bestimmt ist, sowie auch damit das schiefwinklige Restdreieck $PP'N$, ist nun unsere ganze Aufgabe auf die Be-

handlung zweier rechtwinkliger sphärischer Dreiecke zurückgeführt, weshalb wir die nötigen Formeln (die man auch rein goniometrisch aus den Formeln (16), (17), (18) herleiten könnte) sofort in der zur Rechnung nötigen Aufeinanderfolge hier hersetzen.

Zur Bestimmung von M und m hat man:

$$\left. \begin{aligned} \tan M &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cos \alpha} \\ \cos m &= \frac{\sin \varphi}{\sin M} \quad \text{oder} \quad \cos m = \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{\cos M} \\ \sin m &= \sin \alpha \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Nachdem so M und m bestimmt und versichert sind, hat man weiter:

$$\tan \alpha' = \frac{\tan m}{\cos(M + \sigma)} \quad (21)$$

$$\sin \varphi' = \cos m \sin(M + \sigma) \quad \tan \varphi' = \tan(M + \sigma) \cos \alpha' \quad (22)$$

$$\sin \lambda = \frac{\sin \sigma \sin \alpha'}{\cos \varphi} = \frac{\sin \sigma \sin \alpha}{\cos \varphi'} \quad (23)$$

Die Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel mit den gegebenen Werten φ , α und σ nach (1), führt auf die Hilfswinkel:

$$M = 54^\circ 11' 19,61'' \quad m = 20^\circ 20' 7,75''$$

womit die Werte φ' , α' und λ sich wie früher ergeben.

II d. Rechtwinklige Coordinaten x , y für den Punkt P' .

In Fig. 3. ist der Meridian PN gerade gezogen, und durch $P'P_1$ eine Senkrechte angedeutet, welche von P' auf den Meridian von P gefällt wurde, so dass die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten $PP_1 = x$ und $P_1P' = y$ zur Anschauung kommen. Diese Werte x und y sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\tan x = \tan \sigma \cos \alpha \quad (24)$$

$$\text{und } \sin y = \sin \sigma \sin \alpha, \quad \tan y = \sin x \tan \alpha \quad (25)$$

Mit x hat man auch $\varphi + x$ und $90^\circ - (\varphi + x)$ die Kathete NP_1 des grösseren rechtwinkligen Dreiecks NP_1P' , welches φ' und λ giebt, nämlich:

$$\tan \lambda = \frac{\tan y}{\cos(\varphi + x)} \quad (26)$$

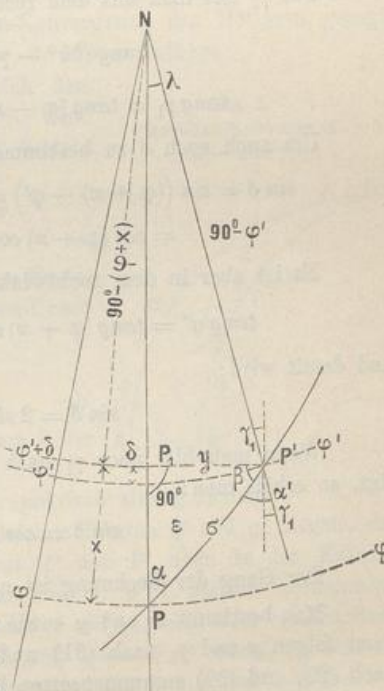
$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi' &= \sin(\varphi + x) \cos y \\ \tan \varphi' &= \tan(\varphi + x) \cos \lambda \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Endlich nach dem Sinussatze:

$$\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\cos \varphi'} \quad (28)$$

Diese einfache und naheliegende Auflösung hat Gauss (in Art. 16. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abtheilung, Göttingen 1843“) noch verfeinert, erstens

Fig. 3.
Rechtwinklige Coordinaten
 $PP_1 = x$, $P_1P' = y$.



dadurch, dass der kleine Breiten-Unterschied δ zwischen den Punkten P_1 und P' für sich dargestellt wurde, und zweitens dadurch, dass auch die Meridian-Konvergenz γ_1 zwischen P_1 und P' und ausserdem der sphärische Excess ε des rechtwinkligen Dreiecks PP_1P' beigezogen wurde.

Denkt man sich diese drei kleinen Werte δ , γ_1 und ε bestimmt, so ist die Breite bestimmt durch:

$$\begin{aligned} (90^\circ - \varphi') - (90^\circ - (\varphi + x)) &= \delta \\ \varphi' &= \varphi + x - \delta \end{aligned} \quad (29)$$

ferner für die Azimute:

$$\begin{aligned} \alpha' - \gamma_1 + \beta &= 90^\circ \quad \text{und} \quad \alpha + \beta = 90^\circ + \varepsilon \\ \alpha' - \alpha &= \gamma_1 - \varepsilon \end{aligned} \quad (30)$$

woraus:

Um den sphärischen Excess ε zu bestimmen, haben wir die schon in § 44. S. 245 benutzte Entwicklung:

$$\begin{aligned} \cotg \alpha \cotg \beta &= \cos \sigma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \cos (\alpha + \beta) &= -\sin \varepsilon = -2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \sin \varepsilon &= 2 \sin \alpha \frac{\sin x}{\sin \sigma} \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \sin \varepsilon &= \tan \frac{\sigma}{2} \sin x \sin \alpha \end{aligned} \quad (31)$$

Für γ_1 hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck NP_1P' :

$$\begin{aligned} \tan (90^\circ - \gamma_1) &= \frac{\tan (90^\circ - (\varphi + x))}{\sin y} \\ \tan \gamma_1 &= \tan (\varphi + x) \sin y = \tan (\varphi + x) \sin \sigma \sin \alpha \end{aligned} \quad (32)$$

Um auch noch δ zu bestimmen, hat man zunächst nach (29):

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin ((\varphi + x) - \varphi') = \sin (\varphi + x) \cos \varphi' - \cos (\varphi + x) \sin \varphi' \\ &= \cos (\varphi + x) \cos \varphi' (\tan (\varphi + x) - \tan \varphi') \end{aligned}$$

Es ist aber in dem rechtwinkligen Dreieck NP_1P' :

$$\tan \varphi' = \tan (\varphi + x) \cos \lambda = \tan (\varphi + x) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right)$$

und damit wird:

$$\sin \delta = 2 \sin (\varphi + x) \cos \varphi' \sin^2 \frac{\lambda}{2}$$

Wenn man hier noch γ_1 nach (32) zuzieht und $\cos \varphi' \sin \lambda = \sin y$ berücksichtigt, so erhält man:

$$\sin \delta = \cos (\varphi + x) \tan \frac{\lambda}{2} \tan \gamma_1 \quad (33)$$

Der Gang der Rechnung ist nun folgender:

Man bestimmt x und y sowie auch λ wie im einfachen Fall, nach (24), (25), (26), dann folgen ε und γ_1 nach (31) und (32) und δ nach (33), worauf man φ' und α' nach (29) und (30) zusammensetzen kann.

Die Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel gestaltet sich so:

Gegeben $\varphi = 49^\circ 30' 0''$ $\sigma = 1^\circ 11' 19,482''$ $\alpha = 32^\circ 21' 1,291''$

Nach (24), (25), (26) findet man:

$$x = 1^\circ 0' 15,420'' \quad y = 0^\circ 38' 9,813'' \quad \lambda = 1^\circ 0' 0,000''$$

Die Formeln (31), (32), (33) liefern:

$$\varepsilon = 0^\circ 0' 20,0687'' \quad \gamma_1 = 0^\circ 46' 17,9616'' \quad \delta = 0^\circ 0' 15,4199''$$

und nun setzt man so zusammen:

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 & = & 0^\circ 46' 17,9616'' \\ \varepsilon & = & 0^\circ 0' 20,0687'' \\ \hline \gamma - \varepsilon & = & 0^\circ 45' 57,8929'' = \alpha' - \alpha, \\ \alpha & = & 32^\circ 21' 1,291'' \\ \hline \alpha' & = & 33^\circ 6' 58,184'' \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x & = & 1^\circ 0' 15,420'' \\ \delta & = & 0^\circ 0' 15,420'' \\ \hline x - \delta & = & 1^\circ 0' 0,000'' \\ \varphi & = & 49^\circ 30' 0,000'' \\ \hline \varphi' & = & 50^\circ 30' 0,000'' \end{array}$$

Der Vorteil dieser Berechnung im Vergleich mit allen früher beschriebenen besteht darin, wenn σ selbst klein ist (was hier immer der Fall ist), dass dann auch alle andern, die Endergebnisse beeinflussenden Grössen x , y , γ_1 , ε selbst *klein* sind, und daher aus *sin* oder *tang* sich sehr scharf berechnen lassen.

Man kann durch diese verfeinerten Formeln in Hinsicht auf Rechenschärfe, mit einer gewöhnlichen 7 stelligen Logarithmentafel nahe dasselbe erreichen, wozu man mit den früheren Formeln nahezu 10 stellige Logarithmen braucht.

Bemerkungen zur Meridian-Konvergenz.

Nachdem schon am Schlusse von § 45. S. 256—257 zur Wort-Erklärung und zur sachlichen Begriffsbestimmung der „Meridian-Konvergenz“ das Nötigste gesagt worden ist, können wir noch mit beistehender Fig. 3. einiges zufügen:

Die Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$ ist gleich dem sphärischen Excesse γ des Vierecks $ABP'P$ Fig. 3., denn da dieses Viereck bei A und B rechte Winkel hat, besteht die Gleichung:

$$90^\circ + 90^\circ + (180^\circ - \alpha) + \alpha' - 360^\circ = \gamma \quad (a)$$

$$\text{d. h. } \alpha' - \alpha = \gamma$$

Bezeichnet man ferner mit ε den sphärischen Excess des Dreiecks $PP'N$, welches bei N den Längen-Unterschied λ enthält, so hat man:

$$\lambda + \alpha + (180^\circ - \alpha') - 180^\circ = \varepsilon$$

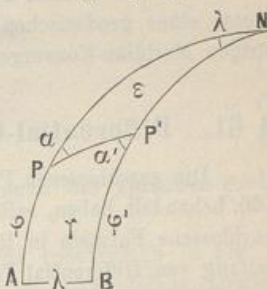
$$\text{d. h.: } \lambda = (\alpha' - \alpha) + \varepsilon \quad \text{oder} \quad \alpha' - \alpha = \lambda - \varepsilon \quad (b)$$

Das letzte ist auch unmittelbar klar, indem λ der Excess des ganzen Dreiecks ABN sein muss.

Diese beiden Gleichungen (a) und (b) sind sphärisch streng richtig.

Wenn die beiden Punkte P und P' auf gleichen Breiten φ und φ' liegen, so ist der Winkel, den die Meridian-Tangenten von P und P' oben in der Erdaxe einschliessen, genau gleich $\lambda \sin \varphi$, wie man aus Fig. 1. § 61. alsbald entnehmen kann; und das kann man auch so aussprechen, dass $\lambda \sin \varphi$ gleich dem sphärischen Excess des Vierecks $ABP'P$ ist, wenn $\varphi = \varphi'$ und wenn PP' nicht als *Grosskreisbogen* der Kugel, sondern als *Parallelkreisbogen*, parallel dem Äquator AB auf-

Fig. 3.
Meridian-Konvergenz.
 $\alpha' - \alpha = \gamma$.



gefasst wird. Das Viereck hat dann 4 Winkel, welche alle $= 90^\circ$ sind, aber der Parallelkreisbogen PP' hat dann eine geodätische Krümmung $= \lambda \sin \varphi$, welche bei der Kegelabwicklung sich auch in der Ebene darstellen lässt.

Im gewöhnlichen Sinne ist dieses $\lambda \sin \varphi$ aber durchaus nicht die genaue Meridian-Konvergenz $\alpha - \alpha'$ für zwei Punkte unter gleichen Breiten $\varphi' = \varphi$, denn dazu müsste PP' ein Grosskreisbogen sein.

Was in diesem Falle $\alpha' - \alpha$ wird, das lässt sich aus der Gleichung (5) S. 339 leicht entnehmen, diese giebt für $\varphi' = \varphi$ den Wert

$$\tan \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \tan \frac{\lambda}{2} \sin \varphi \quad (c)$$

Das kann man auch unmittelbar begründen, wenn man in Fig. 1. S. 338 $\varphi' = \varphi$ nimmt und bei N den Halbierungsbogen für $\frac{\lambda}{2}$ rechtwinklig auf PP' zieht.

Die Gleichung (c) giebt allerdings in erster Näherung $\alpha' - \alpha = \lambda \sin \varphi$, wie immer in erster Näherung, aber streng gilt dieses $\lambda \sin \varphi$ nur für zwei Meridiantangenten unter den gleichen Breiten $\varphi' = \varphi$.

Um diese Begriffe auch sofort für die späteren Berechnungen mit der geodätischen Linie festzustellen, müssen wir nun im Anschluss an Fig. 1. sagen: Unter Meridian-Konvergenz zwischen zwei Punkten P und P' verstehen wir die Differenz der Azimute α und α' , welche der verbindenden geodätischen Linie PP' in P und P' in dem Sinne von Fig. 3. zukommen.

Indessen eine absolut im Sprachgebrauch der Geodäsie feststehende Definition ist auch dieses nicht; wir werden später finden, dass Gauss in seiner konformen Projektion der Hannoverschen Landesaufnahme mit dem Worte Meridian-Konvergenz wieder etwas anderes bezeichnet hat, was zwar in erster Näherung mit dem Gesagten übereinstimmt, aber in aller Strenge gar nicht ohne jene besondere Projektionsart definiert werden kann.

Wenn nichts Besonderes bemerkt ist, werden wir das Wort Meridian-Konvergenz in dem Sinne von $\alpha' - \alpha$ nach Fig. 3. S. 345 für PP' als geodätische Linie anwenden.

Damit kann man auch den Satz bilden, dass der sphärische bzw. sphäroidische, Excess eines geodätischen Dreiecks gleich der algebraischen Summe der drei zugehörigen Meridian-Konvergenzen ist.

§ 61. Differential-Gleichungen des sphärischen Polar-Dreiecks.

Die geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie, welche wir im vorigen § 60. behandelt haben, erfüllen nicht alle Bedürfnisse; es ist in vielen Fällen nützlich, geschlossene Formeln in Reihen aufzulösen, und der erste Schritt hiezu ist die Aufstellung von Differential-Formeln.

Wir betrachten in Fig. 1. S. 347 das schon früher benützte sphärische Dreieck $PP'N$, jedoch nehmen wir nun an, dass die Entfernung PP' der beiden betrachteten Punkte sehr *klein* $= ds$ werde, wodurch auch alle anderen Differenzen $\varphi' - \varphi$, $\alpha' - \alpha$, λ klein werden, was wir in Fig. 1. und Fig. 2. durch Differential-Zeichen $d\varphi$, $d\alpha$ u. s. w. angedeutet haben.

Wir betrachten in Fig. 1. eine Kugel mit zwei Punkten P und P' , deren Entfernung $PP' = ds$ klein ist. Die Breiten dieser Punkte seien bzw. φ und $\varphi + d\varphi$, so dass die kleine Breiten-Differenz $d\varphi$ zwischen den Parallelkreisen von P und P'