



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 61. Differenzial-Gleichungen des sphärischen Polar-Dreiecks

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](#)

gefasst wird. Das Viereck hat dann 4 Winkel, welche alle $= 90^\circ$ sind, aber der Parallelkreisbogen PP' hat dann eine geodätische Krümmung $= \lambda \sin \varphi$, welche bei der Kegelabwicklung sich auch in der Ebene darstellen lässt.

Im gewöhnlichen Sinne ist dieses $\lambda \sin \varphi$ aber durchaus nicht die genaue Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$ für zwei Punkte unter gleichen Breiten $\varphi' = \varphi$, denn dazu müsste PP' ein Grosskreisbogen sein.

Was in diesem Falle $\alpha' - \alpha$ wird, das lässt sich aus der Gleichung (5) S. 339 leicht entnehmen, diese giebt für $\varphi' = \varphi$ den Wert

$$\tan \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \tan \frac{\lambda}{2} \sin \varphi \quad (c)$$

Das kann man auch unmittelbar begründen, wenn man in Fig. 1. S. 338 $\varphi' = \varphi$ nimmt und bei N den Halbierungsbogen für $\frac{\lambda}{2}$ rechtwinklig auf PP' zieht.

Die Gleichung (c) giebt allerdings in erster Näherung $\alpha' - \alpha = \lambda \sin \varphi$, wie immer in erster Näherung, aber streng gilt dieses $\lambda \sin \varphi$ nur für zwei Meridian-tangentialen unter den gleichen Breiten $\varphi' = \varphi$.

Um diese Begriffe auch sofort für die späteren Berechnungen mit der geodätischen Linie festzustellen, müssen wir nun im Anschluss an Fig. 1. sagen: Unter Meridian-Konvergenz zwischen zwei Punkten P und P' verstehen wir die Differenz der Azimute α und α' , welche der verbindenden geodätischen Linie PP' in P und P' in dem Sinne von Fig. 3. zukommen.

Indessen eine absolut im Sprachgebrauch der Geodäsie feststehende Definition ist auch dieses nicht; wir werden später finden, dass Gauss in seiner konformen Projektion der Hannoverschen Landesaufnahme mit dem Worte Meridian-Konvergenz wieder etwas anderes bezeichnet hat, was zwar in erster Näherung mit dem Gesagten übereinstimmt, aber in aller Strenge gar nicht ohne jene besondere Projektionsart definiert werden kann.

Wenn nichts Besonderes bemerkt ist, werden wir das Wort Meridian-Konvergenz in dem Sinne von $\alpha' - \alpha$ nach Fig. 3. S. 345 für PP' als geodätische Linie anwenden.

Damit kann man auch den Satz bilden, dass der sphärische bzw. sphäroidische Excess eines geodätischen Dreiecks gleich der algebraischen Summe der drei zugehörigen Meridian-Konvergenzen ist.

§ 61. Differential-Gleichungen des sphärischen Polar-Dreiecks.

Die geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie, welche wir im vorigen § 60. behandelt haben, erfüllen nicht alle Bedürfnisse; es ist in vielen Fällen nützlich, geschlossene Formeln in Reihen aufzulösen, und der erste Schritt hiezu ist die Aufstellung von Differential-Formeln.

Wir betrachten in Fig. 1. S. 347 das schon früher benutzte sphärische Dreieck $PP'N$, jedoch nehmen wir nun an, dass die Entfernung PP' der beiden betrachteten Punkte sehr klein $= ds$ werde, wodurch auch alle anderen Differenzen $\varphi' - \varphi$, $\alpha' - \alpha$, λ klein werden, was wir in Fig. 1. und Fig. 2. durch Differential-Zeichen $d\varphi$, $d\alpha$ u. s. w. angedeutet haben.

Wir betrachten in Fig. 1. eine Kugel mit zwei Punkten P und P' , deren Entfernung $PP' = ds$ klein ist. Die Breiten dieser Punkte seien bzw. φ und $\varphi + d\varphi$, so dass die kleine Breiten-Differenz $d\varphi$ zwischen den Parallelkreisen von P und P'

erscheint. Durch die beiden Meridiane NP und NP' kommt auch der Längenunterschied $d\lambda$ zum Ausdruck und werden die Azimute des Bogens ds in P und in P' bestimmt, diese Azimute seien bzw. α und $\alpha + d\alpha$.

Fig. 1.

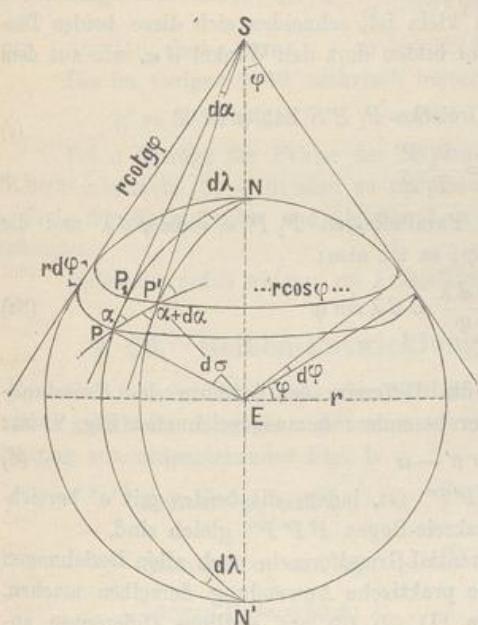
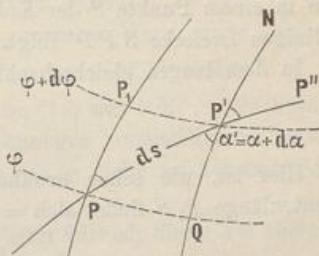


Fig. 2
Besonderer Teil von Fig. 1.
 $PP' = ds = r d\sigma$



Man kann nun auf die beiden Punkte P und P' mit ihren Breiten φ , $\varphi + d\varphi$, Azimuten α , $\alpha + d\alpha$ und ihrer Entfernung $d\sigma$ und dem Längenunterschied $d\lambda$ die allgemeinen Gauss'schen Formeln (3) § 60. S. 339 anwenden; und wenn man dabei, im Sinne der Differential-Rechnung, $\sin \frac{d\sigma}{2} = \frac{d\sigma}{2}$, $\cos \frac{d\sigma}{2} = 1$ setzt u. s. w., so geben die drei ersten jener Gleichungen (3) § 60. S. 339 folgendes:

$$d\sigma \sin \alpha = d\lambda \cos \varphi \quad (1)$$

$$d\sigma \cos \alpha = d\varphi \quad (2)$$

$$d\alpha = d\lambda \sin \varphi \quad (3)$$

Diese sind die sehr wichtigen Differential-Gleichungen des sphärisch-geodätischen Polar-Dreiecks.

Man kann diese Gleichungen (1), (2), (3) auch leicht geometrisch in Fig. 1. nachweisen, wozu zuerst das kleine, als rechtwinklig eben zu behandelnde Dreieck P_1PP' , welches in Fig. 2. besonders herausgezeichnet ist, dient. Dasselbe giebt mit $r d\sigma = ds$:

$$ds \sin \alpha = P_1P' \quad (1a)$$

$$ds \cos \alpha = P_1P \quad (2a)$$

Diese Gleichungen sind entsprechend (1) und (2), wozu für (2a) nur einzusehen ist, dass PP_1 ein Meridianbogen $= r d\varphi$ für den Halbmesser r oder kurz $= d\varphi$ für den Halbmesser 1 ist. Sodann für (1a) hat man den Parallelkreis-Halbmesser $p = r \cos \varphi$

zu betrachten (bzw. $= r \cos(\varphi + d\varphi)$, welcher mit $r = 1$ und für den Längen-Unterschied $d\lambda$ den Parallelkreis-Bogen $P_1 P' = d\lambda \cos \varphi$ giebt.

Während die zwei ersten Gleichungen (1) und (2) sich geradezu aus dem kleinen rechtwinkligen Dreieck PP_1P' geometrisch herleiten lassen, ist zur geometrischen Begründung der dritten Gleichung (3) die Betrachtung der Meridian-Tangenten PS und $P'S$ nötig. Insofern PP_1 unendlich klein ist, schneiden sich diese beiden Tangenten in einem Punkte S der Erdaxe und bilden dort den Winkel $d\alpha$, wie aus dem geradlinigen Dreiecke SPP' folgt.

In dem langen gleichschenkligen Dreiecke $P_1 P' S$ hat man

$$d\alpha = \frac{P_1 P'}{P_1 S}$$

Hier ist, wie schon erwähnt, der Parallelbogen $P_1 P' = r \cos \varphi d\lambda$ und die Tangentenlänge $P_1 S$ findet sich $= r \cot \varphi$; es ist also:

$$d\alpha = \frac{r \cos \varphi d\lambda}{r \cot \varphi} = d\lambda \sin \varphi \quad (3a)$$

womit die Gleichung (3) begründet ist.

Die Meridian-Konvergenz $d\alpha$ ist die Differenz der Azimute des Grosskreis-Bogens PP' in P und in P' , d. h. in der besonders herausgezeichneten Fig. 2. ist:

$$d\alpha = \alpha' - \alpha \quad (4)$$

wobei α' sowohl $= PP'Q$ als auch $= NP'P''$ ist, indem die *beiden* mit α' bezeichneten Schnittwinkel in P' für einen Grosskreis-Bogen $PP'P''$ gleich sind.

Nachdem wir so die wichtigen Differential-Grundformeln nach allen Beziehungen erörtert haben, wollen wir auch noch eine praktische Anwendung derselben machen.

Wenn man die Differential-Formeln (1), (2), (3) auf endliche Differenzen anwendet und dabei statt der allgemeinen Werte φ und α die Mittelwerte φ_0 und α_0 setzt, so hat man aus (1), (2), (3):

$$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = \varphi_0 \quad \sigma \sin \alpha_0 = \lambda \cos \varphi_0 \quad (5)$$

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2} = \alpha_0 \quad \sigma \cos \alpha_0 = \varphi' - \varphi \quad (6)$$

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \varphi_0 \quad (7)$$

Dieses sind wieder dieselben Gleichungen wie (2)–(3) § 56. S. 312.

Aus (5) und (6) findet man:

$$\tan \alpha_0 = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\varphi' - \varphi} \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{\varphi' - \varphi}{\cos \alpha_0} \quad (9)$$

Man kann auch unmittelbar σ durch Quadrieren und Addieren von (5) und (6) finden:

$$\sigma = \sqrt{(\varphi' - \varphi)^2 + (\lambda \cos \alpha_0)^2} \quad (10)$$

Nachdem $\alpha' + \alpha = 2\alpha_0$ aus (8) und $(\alpha' - \alpha)$ aus (7) berechnet sind, hat man auch α' und α .

Wir wollen diese Näherungs-Formeln auf unser kleines sphärisches Normal-Beispiel anwenden:

$$\begin{aligned} \text{Gegeben} \quad \varphi &= 49^\circ 30' \quad \varphi' = 50^\circ 30' \quad \lambda = 1^\circ 0' = 3600'' \\ \varphi_0 &= 50^\circ 0' \quad \varphi' - \varphi = 1^\circ 0' = 3600''. \end{aligned}$$

Aus (8) findet man: $\alpha_0 = 32^\circ 43' 56,67''$ (11)

Aus (7) findet man: $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,88''$ (12)

$$\alpha' = 33^\circ 6' 55,55'' \quad (13)$$

$$\alpha = 32^\circ 20' 57,79'' \quad (14)$$

Aus (10) findet man: $\sigma = 4279,57'' = 1^\circ 11' 19,57''$ (15)

Die im vorigen § 60. mehrfach berechneten genaueren Werte sind:

$$\alpha' = 33^\circ 6' 59,19'' , \alpha = 32^\circ 21' 1,29'' , \sigma = 1^\circ 11' 19,48'' \quad (16)$$

Bei σ beträgt der Fehler des Näherungswertes (15) nur 0,09''. Die bequemen Näherungsformeln (5)–(10) sind zu manchen Berechnungen unmittelbar zu brauchen, z. B. in der Kartographie und überhaupt in Fällen, wo es nicht auf äußerste Schärfe ankommt.

Indessen werden wir nun zur Aufstellung genauerer Formeln dieser Art übergehen.

§ 62. Reihen-Entwicklungen mit der Mittelbreite.

Wir nehmen die Gaußschen Gleichungen (3) § 60. S. 339 nochmals vor; wir wollen jedoch die Bezeichnungen nun ein wenig anders wählen, nämlich nach An- deutung von untenstehender Fig. 1.

$$\text{Breiten: } \varphi_1 \text{ und } \varphi_2 , \quad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi , \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \beta \quad (1)$$

$$\text{Azimute: } \alpha_1 \text{ und } \alpha_2 , \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha , \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \gamma \quad (2)$$

$$\text{Längen-Unterschied: } \lambda \quad (3)$$

$$\text{Verbindungs-Bogen: } \sigma \quad (4)$$

Damit werden die Gleichungen (3) § 60. S. 339:

Fig. 1.

$$\sin \frac{\sigma}{2} \sin \alpha = \sin \frac{\lambda}{2} \cos \varphi \quad (5)$$

$$\sin \frac{\sigma}{2} \cos \alpha = \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \quad (6)$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\lambda}{2} \sin \varphi \quad (7)$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\beta}{2} \quad (8)$$

Wir nehmen zuerst (5) und (6), welche entwickelt geben:

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} \right) \sin \alpha = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{48} \right) \cos \varphi$$

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} \right) \cos \alpha = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48} \right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} \right)$$

Kürzer geschrieben:

$$\sigma \sin \alpha \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} \right) = \lambda \cos \varphi \left(1 - \frac{\lambda^2}{24} \right) \quad (9)$$

$$\sigma \cos \alpha \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} \right) = \beta \left(1 - \frac{\beta^2}{24} \right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} \right) \quad (10)$$

