Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 62. Reihen-Entwicklungen mit der Mittelbreite

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Aus (8) findet man: $\alpha_0 = 32°\,43'\,56{,}67''$ (11)

Aus (7) findet man: $\dfrac{\alpha' - \alpha}{2} = 0°\,22'\,58{,}88''$ (12)

$\alpha' = 33°\;\;6'\,55{,}55''$ (13)

$\alpha = 32°\,20'\,57{,}79''$ (14)

Aus (10) findet man: $\sigma = 4279{,}57'' = 1°\,11'\,19{,}57''$ (15)

Die im vorigen § 60. mehrfach berechneten genaueren Werte sind:

$$\alpha' = 33°\,6'\,59{,}19'' \quad , \quad \alpha = 32°\,21'\,1{,}29'' \quad , \quad \sigma = 1°\,11'\,19{,}48'' \qquad (16)$$

Bei σ beträgt der Fehler des Näherungswertes (15) nur 0,09″. Die bequemen Näherungsformeln (5)—(10) sind zu manchen Berechnungen unmittelbar zu brauchen, z. B. in der Kartographie und überhaupt in Fällen, wo es nicht auf äusserste Schärfe ankommt.

Indessen werden wir nun zur Aufstellung genauerer Formeln dieser Art übergehen.

§ 62. Reihen-Entwicklungen mit der Mittelbreite.

Wir nehmen die Gaussschen Gleichungen (3) § 60. S. 339 nochmals vor; wir wollen jedoch die Bezeichnungen nun ein wenig anders wählen, nämlich nach Andeutung von untenstehender Fig. 1.

$$\text{Breiten: } \varphi_1 \text{ und } \varphi_2 \quad , \quad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi \quad , \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \beta \qquad (1)$$

$$\text{Azimute: } \alpha_1 \text{ und } \alpha_2 \quad , \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha \quad , \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \gamma \qquad (2)$$

Längen-Unterschied: λ (3)

Verbindungs-Bogen: σ (4)

Damit werden die Gleichungen (3) § 60 S. 339:

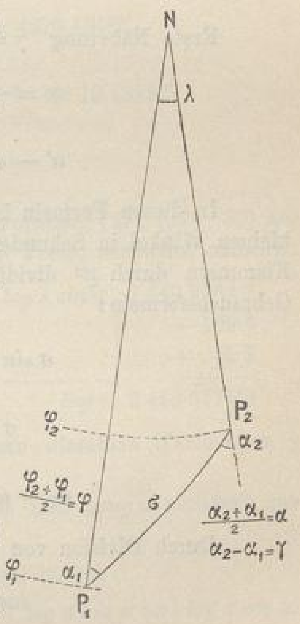
$$\sin\frac{\sigma}{2}\sin\alpha = \sin\frac{\lambda}{2}\cos\varphi \qquad (5)$$

$$\sin\frac{\sigma}{2}\cos\alpha = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\lambda}{2} \qquad (6)$$

$$\cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\lambda}{2}\sin\varphi \qquad (7)$$

$$\cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\beta}{2} \qquad (8)$$

Fig. 1.



Wir nehmen zuerst (5) und (6), welche entwickelt geben:

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48}\right)\sin\alpha = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{48}\right)\cos\varphi$$

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48}\right)\cos\alpha = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{8}\right)$$

Kürzer geschrieben:

$$\sigma\sin\alpha\left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) = \lambda\cos\varphi\left(1 - \frac{\lambda^2}{24}\right) \qquad (9)$$

$$\sigma\cos\alpha\left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) = \beta\left(1 - \frac{\beta^2}{24}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{8}\right) \qquad (10)$$

Hier kann man in den Korrektionsgliedern als erste Näherung setzen:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \tag{11}$$

Wenn man dieses in (9) und (10) links einsetzt, und dann nach $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ auflöst und ordnet, so findet man:

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{24} - \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24}\right) \tag{12}$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{2}\right) \tag{13}$$

Durch Division dieser zwei Gleichungen findet man $\tan g\, \alpha$, und dann σ aus jeder einzeln. Man kann jedoch auch (12) und (13) quadrieren und addieren, und damit eine unmittelbare Formel für σ^2 finden, nämlich:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{12}(-3\,\beta^2 \lambda^2 + 2\,\beta^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \tag{14}$$

oder

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi}\left(1 - \frac{\beta^2 \lambda^2}{8\,\sigma^2} + \frac{\beta^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi}{12\,\sigma^2} - \frac{\lambda^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{24\,\sigma^2}\right) \tag{14a}$$

Man kann diese Formel auch leicht aus (9) § 60. S. 348 herleiten.

Um auch die Meridian-Konvergenz zu erhalten, bilden wir zunächst aus (7) und (8) durch Division:

$$\tan g \frac{\gamma}{2} = \tan g \frac{\lambda}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

Dieses ebenso wie das frühere entwickelt, giebt:

$$\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^3}{24} = \sin \varphi \frac{\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^3}{24}}{1 - \frac{\beta^2}{8}} = \frac{\sin \varphi}{2}\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{12}\right)\left(1 + \frac{\beta^2}{8}\right)$$

Erste Näherung $\gamma = \lambda \sin \varphi$, also $\gamma^3 = \lambda^3 \sin^3 \varphi + \ldots$

$$\gamma = -\frac{\lambda^3 \sin^3 \varphi}{12} + \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} + \frac{\beta^2}{8}\right)$$

$$\alpha' - \alpha = \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8} + \frac{\lambda^2}{12} \cos^2 \varphi\right) \tag{15}$$

In diesen Formeln ist nach analytischem Masse gerechnet, und wenn man die kleinen Winkel in Sekunden haben will, muss man alle quadratischen Glieder in den Klammern durch ϱ^2 dividieren. Dieses giebt für (12), (13) und (15) die folgenden Gebrauchsformeln:

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{24\,\varrho^2} - \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\,\varrho^2}\right) \tag{16}$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left(1 - \frac{\lambda^2}{8\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{24\,\varrho^2}\right) \tag{17}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{12\,\varrho^2}\right) \tag{18}$$

Durch Division von (16) und (17) findet man auch:

$$\tan g\, \alpha = \frac{\lambda \cos \varphi}{\beta}\left(1 + \frac{\beta^2}{24\varrho^2} + \frac{\lambda^2}{12\,\varrho^2}\right) \tag{19}$$

Die konstanten Coëfficienten zu den vorstehenden Formeln sind:

$$log\frac{1}{8\varrho^2} = 8.468\,0597 \qquad log\frac{1}{12\varrho^2} = 8.291\,9685 \qquad log\frac{1}{24\varrho^2} = 7.990\,9385 \qquad (20)$$

Man kann die vorstehenden Formeln (17), (18), (19) auch logarithmisch anwenden, nämlich in dieser Form:

$$log\,\sigma\,sin\,\alpha = log\,\lambda\,cos\,\varphi + \frac{\mu}{24\varrho^2}\beta^2 - \frac{\mu}{24\varrho^2}\lambda^2\,sin^2\,\varphi \qquad (21)$$

$$log\,\sigma\,cos\,\alpha = log\,\beta - \frac{\mu}{8\varrho^2}\lambda^2 + \frac{\mu}{24\varrho^2}\lambda^2\,cos^2\,\varphi \qquad (22)$$

$$log\,\gamma = log\,\lambda\,sin\,\varphi + \frac{\mu}{8\varrho^2}\lambda^2 + \frac{\mu}{12\varrho^2}\lambda^2\,cos^2\,\varphi \qquad (23)$$

Man braucht dann statt (20) folgende Konstanten für 7. Logar.-Stelle:

$$log\frac{\mu}{8\varrho^2} = 5{\cdot}105\,8441 \qquad log\frac{\mu}{12\varrho^2} = 4{\cdot}929\,7528 \qquad log\frac{\mu}{24\varrho^2} = 4{\cdot}628\,7228 \qquad (24)$$

Wir wollen dieses Rechen-Verfahren auf unser kleines Normalbeispiel (1) § 60. S. 338 anwenden und zwar zuerst mit den Formeln (16), (17), (18).

Gegeben $\varphi_1 = 49°\,30'$ $\quad\varphi_2 = 50°\,30'$ $\quad\lambda = 1°\,0'$

also $\varphi = 50°\;\;0'$ $\quad\beta = 1°\,0' = 3600''$ $\quad\lambda = 3600''$

Die Rechnung nach (16), (17), (18) giebt:

$\lambda\,cos\,\varphi = 2314{,}0352''$	$\beta = 3600{,}0000''$	$\lambda\,sin\,\varphi = 2757{,}7600''$
$+\,0{,}0294$	$-\,0{,}1371$	$+\,0{,}1050$
$-\,0{,}0172$	$+\,0{,}0189$	$+\,0{,}0289$
$\sigma\,sin\,\alpha = 2314{,}0474''$	$\sigma\,cos\,\alpha = 3599{,}8818''$	$\gamma = 2757{,}8939''$
		$\gamma = 0°\,45'\,57{,}8939''$

$$\alpha = \frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} = 32°\,44'\;\;0{,}2385'' \qquad \sigma = 4279{,}4819''$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} = \;0°\,22'\,58{,}9470'' \qquad \sigma = 1°\,11'\,19{,}4819''$$

$$\alpha_2 = 33°\;\;6'\,59{,}1855''$$
$$\alpha_1 = 32°\,21'\;\;1{,}2915''$$

Ausserdem kann man auch die logarithmischen Formeln (21), (22), (23) anwenden, wobei man dasselbe, wie soeben, nur in anderer Form, bekommt, nämlich:

$log\,\lambda\,cos\,\varphi$	3.364 3700·0	$log\,\beta$	3.556 3025·0	$log\,\lambda\,sin\,\varphi$	3.440 5564·7
	+ 55·1		− 165·4		+ 165·4
	− 32·3		+ 22·8		+ 45·5
$log\,\sigma\,sin\,\alpha$	3.364 3722·8	$log\,\sigma\,cos\,\alpha$	3.556 2882·4	$log\,\gamma$	3.440 5775·6

Wenn man damit weiter rechnet, so bekommt man dieselben Werte α, σ, γ u. s. w. wie vorhin.

Wenn man etwa σ selbst nicht braucht, so rechnet man $tang\,\alpha$ geradezu aus der Formel (19), welche in unserem Falle giebt:

$$log\,tang\,\alpha = 9.808\,0675{\cdot}0 + 165{\cdot}4 = 9.808\,0840{\cdot}4.$$

Dieses stimmt, wie es sein soll, mit der Differenz von $log\,\sigma\,sin\,\alpha$ und $log\,\sigma\,cos\,\alpha$.

Wir haben auch noch die Formel (14 a) auf das kleine Normalbeispiel mit $\beta = 1°$, $\lambda = 1°$, $\varphi = 50°$ angewendet und gefunden:

$$\sigma = 4279{,}5747'' - 0{,}1153'' - 0{,}0093'' + 0{,}0318'' = 4279{,}4819'' = 1°\,11'\,19{,}4819''$$

Man kann auch hier die Korrektionsglieder in logarithmischer Form berechnen.

Umkehrung der Formeln.

Man kann die Formeln (16), (17), (18) nicht bloss zur Bestimmung von σ, α_1, α_2 bei gegebenem φ_1, φ_2, λ anwenden, sondern auch umgekehrt dazu, um bei gegebenen φ_1, σ, α_1 die fehlenden φ_2, λ, α_2 zu berechnen. Allerdings geht dieses nur auf indirektem Wege, indem Näherungs-Werte der Unbekannten benützt und allmählich verbessert werden.

Auch sind dann einige Umformungen von (16), (17), (18) vorzunehmen; wir bilden zuerst durch Division von (16) und (18):

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{12\varrho^2} - \frac{\beta^2}{24\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\varrho^2}\right)$$

In den Korrektionsgliedern gilt aber die erste Näherung

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi$$

und damit giebt das vorstehende:

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi \left(1 + \frac{\sigma^2}{12\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\varrho^2}\right) \tag{25}$$

(17) und (16) geben umgestellt:

$$\beta = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{\lambda^2}{8\varrho^2} - \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{24\varrho^2}\right) \tag{26}$$

$$\lambda = \sigma \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{\beta^2}{24\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\varrho^2}\right) \tag{27}$$

Man kann diese Gleichungen auch in logarithmischer Form anwenden, ähnlich wie (21), (22), (23), was wir aber hier nicht mehr besonders schreiben wollen.

Zu einer Zahlen-Anwendung wollen wir von unserem kleinen Normalbeispiel (1) § 60. S. 338 annehmen:

$$\text{Gegeben} \quad \varphi_1 = 49°\,30'\,0'' \quad , \quad \sigma = 1°\,11'\,19{,}482'' \quad , \quad \alpha_1 = 32°\,21'\,1{,}291'' \tag{28}$$

Für φ_2 und λ habe man von irgend wo her, z. B. von einer topographischen Karte, die Näherungswerte:

$$(\varphi_2) = 50°\,30'\,10'' \quad , \quad \lambda = 1°\,0'\,10'' = 3610'' \tag{29}$$

Nun nimmt man aus φ_1 und (φ_2) den genäherten Mittelwert $(\varphi) = 50°\,0'\,5''$ und rechnet mit $(\lambda) = 3610''$, erstmals genähert $(\gamma) = (\lambda) \sin (\varphi) = 2765{,}48''$ $= 0°\,46'\,5{,}48''$; davon die Hälfte zu α_1 nach (28) addiert, giebt die erste Näherung für α:

$$(\alpha) = 32°\,44'\,4''.$$

Nun rechnet man mit $(\varphi) = 50°\,0'\,5''$ und $(\alpha) = 32°\,44'\,4''$ und mit dem genau gegebenen $\sigma = 4279{,}482''$ die Hauptglieder der Formeln (25), (26), (27) aus, und erhält:

$$(\gamma) = 2757{,}93'' \qquad (\beta) = 3599{,}76'' \qquad (\lambda) = 3600{,}14'' \tag{30}$$
$$= 0°\,45'\,57{,}93''$$

Mit diesem (γ) bildet man ein neues

$$(\alpha) = \alpha_1 + \frac{(\gamma)}{2} = 32^\circ\, 44'\, 0{,}25'' \tag{31}$$

Nun sind die Näherungen (β) und (λ) in (30) jedenfalls vollauf genügend zur Berechnung der *Korrektions-Glieder* in (25), (26), (27), und für die Haupt-Glieder hat man ausser dem gegebenen σ die bereits sehr gute Näherung (31), weshalb man die Ausrechnung nach (25), (26), (27) bereits fast endgiltig machen kann. Wenn hiebei γ und β nicht völlig übereinstimmend erhalten werden mit den in beiden Hauptgliedern $\sigma \sin\alpha \tang\varphi$ und $\sigma \cos\alpha$ benützten Werten γ und β, so muss man die Rechnung mit verbesserten α und φ so lange wiederholen, bis völlige Übereinstimmung stattfindet.

Andere Form der Korrektions-Glieder.

Da in den Haupt-Gliedern nur α und φ, aber nicht λ vorkommt, kann man die allmähliche Verbesserung der Näherungswerte auf diese zwei Elemente, bezw. auf γ und β, beschränken; allerdings bei der *ersten* Näherung wird man λ nicht entbehren können, weil eine erste Näherung für γ wohl kaum anders als durch $\lambda \sin\varphi$ zu erhalten sein wird; hat man aber einmal eine solche erste Näherung für γ, so führt man diese auch möglichst unmittelbar in die Korrektions-Glieder ein. Dieses geschieht durch die Näherungs-Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2\varphi \quad , \quad \gamma^2 = \lambda^2 \sin^2\varphi \\ \text{also auch} \qquad \sigma^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \end{array}\right\} \tag{32}$$

Damit schreibt man die Gleichungen (26) und (25) für unseren neuen Zweck so:

$$\beta = \sigma \cos\alpha \left(1 + \frac{\gamma^2}{24\,\varrho^2} + \frac{\lambda^2}{12\,\varrho^2}\right) \tag{33}$$

$$\gamma = \sigma \sin\alpha \tang\varphi \left(1 + \frac{\sigma^2}{12\,\varrho^2} + \frac{\gamma^2}{24\,\varrho^2}\right) \tag{34}$$

oder auch in logarithmischer Form, ähnlich wie (21), (22), (23).

Diese Gleichungen (33) und (34) geben nun eine indirekte Auflösung für φ_2 und α_2 bezw. für β und γ, ähnlich wie dieses schon bei (25), (26), (27) gezeigt wurde; die dritte Grösse λ kommt bei (33) und (34) nur in einem Korrektions-Gliede vor und wird, nachdem β und γ gefunden sind, endgiltig durch die frühere Gleichung (27) bestimmt.

Das in vorstehendem beschriebene indirekte Berechnungs-Verfahren ist sehr genau, dasselbe ist auch (gegen erstes Vermuten) sehr bequem.

Gauss selbst sagt hierüber in Art. 20. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie zweite Abhandlung: „Die Bequemlichkeit dieses Verfahrens wird allerdings erst dann in ihrer vollen Grösse fühlbar, wenn man sich die Hilfen des kleinen Mechanismus bei Handhabung derartiger Methoden zu eigen gemacht hat. Ich begnüge mich, hier nur anzudeuten, dass, was wie eine mehrfache Rechnung erscheint, nicht in der Form von mehreren getrennten Rechnungen, sondern wie eine einzige geschrieben werden soll, indem man bei jeder neuen Überarbeitung nur die letzten Ziffern ergänzt oder verbessert. Jedenfalls braucht man immer nur die letzte Rechnung aufzubewahren, und gerade darin besteht ein grosser Vorteil, zumal bei Messungen von bedeutendem Umfang, dass man dann den ganzen wesentlichen Kern der Berechnung für alle Dreiecksseiten im möglichst kleinen Raume und in der übersichtlichsten zu beliebiger Prüfung der Richtigkeit geeigneten Form besitzt."