Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 63. Weiter-Entwicklungen bis zur 5. Ordnung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

§ 63. Weiter-Entwicklung bis zur 5. Ordnung.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 349.)

Man kann die vorstehenden Entwicklungen, welche bis zur 3. Ordnung, d. h. bis zu Gliedern β^3, λ^3 u. s. w. gehen, noch um eine Stufe weiter, d. h. bis β^5, λ^5 u. s. w. treiben. Allerdings hat das keinen unmittelbar praktischen Zweck, denn die Formeln werden dadurch so umständlich, dass man vorziehen müsste, nach den strengen geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie zu rechnen; indessen bietet die Entwicklung der Glieder 5. Ordnung das beste Mittel zur Gewinnung eines Urteils über die Grenzen der Anwendung der abgekürzten Formeln, und diese sphärischen Glieder 5. Ordnung werden auch später bei der analogen sphäroidischen Aufgabe von Bedeutung sein.

Wir nehmen nun von den strengen Gaussschen Gleichungen (5)—(8) § 62. S. 349 nochmals zunächst die zwei ersten vor:

$$sin\frac{\sigma}{2}\,sin\,\alpha = sin\frac{\lambda}{2}\,cos\,\varphi \tag{1}$$

$$sin\frac{\sigma}{2}\,cos\,\alpha = sin\frac{\beta}{2}\,cos\frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

Diese entwickeln wir nun bis zur 5. Ordnung (vgl. S. 172):

$$\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma^3}{48}+\frac{\sigma^5}{3840}\right)sin\,\alpha = \left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^3}{48}+\frac{\lambda^5}{3840}\right)cos\,\varphi \tag{3}$$

$$\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma^3}{48}+\frac{\sigma^5}{3840}\right)cos\,\alpha = \left(\frac{\beta}{2}-\frac{\beta^3}{48}+\frac{\beta^5}{3840}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{8}+\frac{\lambda^4}{384}\right) \tag{4}$$

Um diese Gleichungen nach $\sigma\,sin\,\alpha$ und $\sigma\,cos\,\alpha$ aufzulösen, denken wir uns links abgesondert:

$$\frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{\sigma^2}{24}+\frac{\sigma^4}{1920}\right)=1-x,\quad \text{d. h.}\quad x=\frac{\sigma^2}{24}-\frac{\sigma^4}{1920}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2=1+\frac{\sigma^2}{24}+\frac{7\,\sigma^4}{5760} \tag{5}$$

Hier ist nach (14) § 62. S. 350:

$$\sigma^2=\beta^2+\lambda^2\,cos^2\,\varphi-\frac{\beta^2\,\lambda^2}{4}-\frac{\lambda^4\,sin^2\,\varphi\,cos^2\,\varphi}{12}+\frac{\beta^2\,\lambda^2}{6}\,cos^2\,\varphi \tag{6}$$

also

$$\sigma^4=\beta^4+\lambda^4\,cos^4\,\varphi+2\,\beta^2\,\lambda^2\,cos^2\,\varphi \tag{7}$$

Wenn man diese (6) und (7) in (5) einsetzt, und damit die rechten Seiten von (3) und (4) multipliziert, so erhält man die gewünschten Ausdrücke für $\sigma\,sin\,\alpha$ und $\sigma\,cos\,\alpha$. Ebenso kann man auch die Reihe für die Meridian-Konvergenz γ finden, und durch $\sigma^2\,sin^2\,\alpha+\sigma^2\,cos^2\,\alpha$ hat man auch eine Reihe für σ^2 unmittelbar.

Da der Weg aller dieser Entwicklungen genügend gezeigt ist, schreiben wir sofort die Ergebnisse, und zwar zunächst:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\,sin\,\alpha=\lambda\,cos\,\varphi\Big\{&1+\frac{1}{24}(\beta^2-\lambda^2+\lambda^2\,cos^2\,\varphi)\\&+\frac{1}{5760}(7\beta^4-70\beta^2\lambda^2+3\lambda^4+54\beta^2\lambda^2cos^2\varphi+7\lambda^4cos^4\varphi-10\lambda^4cos^2\varphi-20\lambda^4sin^2\varphi cos^2\varphi)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ehe wir auch die Formeln für $\sigma \cos \alpha$ u. s. w. anschreiben, wollen wir eine bestimmte Ordnung der Glieder einführen und zur Abkürzung zwei neue Zeichen schreiben. Die Faktoren $\cos^2 \varphi$ und $\sin^2 \varphi$ kann man jedenfalls alle in $\cos^2 \varphi$ ausdrücken, und da dieselben immer in Verbindung mit λ^2 auftreten, stellen wir überall gleiche Potenzen von λ^2 und von $\cos^2 \varphi$ hervor, indem z. B. gesetzt wird:

$$\lambda^4 \cos^2 \varphi = \lambda^4 \cos^4 \varphi \, (1 + \tang^2 \varphi) \tag{9}$$

Der Parallel-Kreisbogen $\lambda \cos \varphi$ werde besonders bezeichnet, indem wir setzen:

$$\lambda \cos \varphi = p \quad \text{und} \quad \tang \varphi = t \tag{10}$$

Damit bekommen wir eine neue Schreibung der ersten Formel (8), und fügen sofort auch die übrigen Formeln dieser Art bei:

$$\sigma \sin \alpha = p \left\{ 1 + \frac{\beta^2 - p^2 t^2}{24} + \frac{7 \beta^4 - 2 \beta^2 p^2 (8 + 35 t^2) - 3 p^4 (8 t^2 - t^4)}{5760} \right\} \tag{11}$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left\{ 1 - \frac{p^2 (2 + 3 t^2)}{24} + \frac{-4 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) + p^4 (-8 - 20 t^2 + 15 t^4)}{5760} \right\} \tag{12}$$

$$\gamma = \quad p\, t \left\{ 1 + \frac{3 \beta^2 + 2 p^2}{24} + \frac{75 \beta^4 + 60 \beta^2 p^2 (1 - 2 t^2) + 24 p^4 (2 - t^2)}{5760} \right\} \tag{13}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 = (\beta^2 + p^2) &- \frac{\beta^2 p^2 (1 + 3 t^2) + p^4 t^2}{12} \\ &- \frac{2 \beta^4 p^2 (1 + 15 t^2) + 2 \beta^2 p^4 (1 + 10 t^2 - 15 t^4) + p^6 (5 + 12 t^2 - 4 t^4)}{2440} \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

Die Formeln (11) und (12) für $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ wird man lieber in logarithmischer Form haben wollen, man kann daher dieselben entwickeln nach der Formel:

$$\log (1 + x) = \mu \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \tag{15}$$

$$\log \left(1 + \frac{A^2}{24} + \frac{B^4}{5760} \right) = \mu \left(\frac{A^2}{24} + \frac{1}{2} \frac{B^4 - 5 A^4}{2880} \right)$$

Auf diese Weise bekommt man, zugleich mit Zusetzung der nötigen ϱ, folgende Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \log \sigma \sin \alpha = \log p &+ \frac{\mu}{24 \varrho^2} (\beta^2 - p^2 t^2) \\ &+ \frac{\mu}{2880 \varrho^4} \Big(\beta^4 - 2 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) - p^4 (12 t^2 + t^4) \Big) \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

$$\left. \begin{aligned} \log \sigma \cos \alpha = \log \beta &- \frac{\mu}{24 \varrho^2} p^2 (2 + 3 t^2) \\ &- \frac{\mu}{2880 \varrho^4} \Big(2 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) + p^4 (14 + 40 t^2 + 15 t^4) \Big) \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

Hiebei hat man die Konstanten für β und p in Sekunden und für Einheiten der 7. Logarithmen-Stelle:

$$\log \frac{\mu}{24 \varrho^2} = 4{\cdot}628\,7228 \qquad \log \frac{\mu}{2880 \varrho^4} = 1{\cdot}920\,691 - 10 \tag{18}$$

Die höheren Glieder in (16) und (17) kann man in dieser Form schreiben:

$$\varDelta (\log \sigma \sin \alpha) = I \beta^4 - II \beta^2 \lambda^2 - III \lambda^4 \; \text{(5. Ordnung)} \tag{19}$$

$$\varDelta (\log \sigma \cos \alpha) = \qquad - IV \beta^2 \lambda^2 - \; V \lambda^4 \; \text{(5. Ordnung)} \tag{20}$$

Die Coëfficienten *I*, *II* u. s. w. haben wir für verschiedene Breiten φ ausgerechnet, wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist, wobei jedoch β und λ nicht wie bei (18) in Sekunden, sondern für (19) und (20) in Graden zu nehmen sind.

φ	*log I*	*log II*	*log III*	*log IV*	*log V*
40°	6·1459	7·3786	6·6345	7·3786	7·3784
45°	6·1459	7·4247	6·6578	7·4247	7·3827
50°	6·1459	7·4663	6·6583	7·4663	7·3828
55°	6·1459	7·5031	6·6371	7·5031	7·3789
60°	6·1459	7·5351	6·5950	7·5351	7·3716

(21)

Ferner haben wir für eine Breite, $\varphi = 50°$, die Glieder ausgerechnet, indem der Reihe nach β und $\lambda = 2°, 4°, 6°, 8°, 10°$ gesetzt wurde. Die Ergebnisse dieser Ausrechnung zeigen folgende zwei Tabellen:

Δ (log σ sin α), nach Formel (19), 5. Ordnung, für $\varphi = 50°$.

$\beta =$	$\lambda = 2°$	$\lambda = 4°$	$\lambda = 6°$	$\lambda = 8°$	$\lambda = 10°$
2°	− 0·053	− 0·304	− 1·012	− 2·615	− 5·724
4°	− 0·157	− 0·831	− 2·239	− 4·826	− 9·198
6°	− 0·247	− 1·621	− 4·201	− 8·426	− 14·902
8°	− 0·184	− 2·540	− 6·759	− 13·279	− 22·708
10°	+ 0·221	− 3·399	− 9·726	− 19·196	− 32·416

(22)

Δ (log σ cos α), nach Formel (20), 5. Ordnung, für $\varphi = 50°$.

$\beta =$	$\lambda = 2°$	$\lambda = 4°$	$\lambda = 6°$	$\lambda = 8°$	$\lambda = 10$
2°	− 0·085	− 0·805	− 3·551	− 10·640	− 25·314
4°	− 0·225	− 1·368	− 4·814	− 12·887	− 28·824
6°	− 0·460	− 2·303	− 6·921	− 16·632	− 34·677
8°	− 0·789	− 3·614	− 9·871	− 21·877	− 42·871
10°	− 1·210	− 5·299	− 13·664	− 28·620	− 53·405

(23)

In gleicher Weise haben wir auch die Formel (13) für die Meridian-Konvergenz behandelt; es fand sich:

$$\Delta(\gamma) = VI\lambda\beta^4 - VII\lambda^3\beta^2 + VIII\lambda^5 \tag{24}$$

wobei die Coëfficienten folgende Werte haben:

φ	*log VI*	*log VII*	*log VIII*
40°	4.4465	3.7291	3.6012
45°	4.4880	4.0901	4.3556
50°	4.5227	4.3068	3.0233
55°	4.5518	4.4606	1.6891_n
60°	4.7560	4.5963	2.8772_n

(25)

Insbesondere ist, für $\varphi = 50°$, hiernach folgendes berechnet:

Korrektion 5. Ordnung für Meridian-Konvergenz nach Formel (13) für $\varphi = 50°$.

$\beta =$	$\lambda = 2°$	$\lambda = 4°$	$\lambda = 6°$	$\lambda = 8°$	$\lambda = 10°$
2°	0,0000″	− 0,0002″	− 0,0007″	− 0,0003″	+ 0,0030″
4°	+ 0,0014″	+ 0,0014″	− 0,0011″	− 0,0063″	− 0,0133″
6°	+ 0,0080″	+ 0,0127″	+ 0,0110″	+ 0,0006″	− 0,0192″
8°	+ 0,0263″	+ 0,0464″	+ 0,0547″	+ 0,0463″	+ 0,0174″
10°	+ 0,0650″	+ 0,1204″	+ 0,1569″	+ 0,1663″	+ 0,1411″

(26)