Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

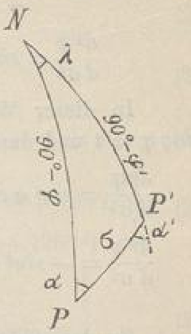
Stuttgart, 1896

§. 64. Reihe-Entwicklungen nach Potenzen von σ

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

§ 64. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von σ.

Fig. 1.



Die sehr wichtigen Reihen, welche $\varphi' - \varphi$, $\alpha' - \alpha$ und λ in steigenden Potenzen der Entfernung σ ausdrücken, kann man auf mancherlei Arten entwickeln.

Wir wollen zuerst daran erinnern, dass bei gegebenem φ, α und σ die drei anderen Werte φ', α' und λ sich durch geschlossene Formeln der sphärischen Trigonometrie angeben lassen, die wir schon in § 60. in (16)—(18) S. 342 angegeben haben. Jene Formeln kann man geradezu in Reihen entwickeln, wie bis zu σ^3 einschliesslich in unserer vorigen 3. Auflage 1890, in § 59. gemacht ist; wir wollen aber hier davon absehen und lieber gleich zu der Entwicklung nach dem Maclaurinschen Satze übergehen, welche beliebig weit ausgedehnt werden kann.

Die Anwendung dieses Satzes auf unseren Fall giebt bis zur 6ten Ordnung:

$$\varphi' - \varphi = \left.\frac{d\varphi}{d\sigma}\right]\sigma + \left.\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}\right]\frac{\sigma^2}{2} + \left.\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3}\right]\frac{\sigma^3}{6} + \left.\frac{d^4\varphi}{d\sigma^4}\right]\frac{\sigma^4}{24} + \left.\frac{d^5\varphi}{d\sigma^5}\right]\frac{\sigma^5}{120} + \left.\frac{d^6\varphi}{d\sigma^6}\right]\frac{\sigma^6}{720} \tag{1}$$

$$\lambda = \left.\frac{d\lambda}{d\sigma}\right]\sigma + \left.\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2}\right]\frac{\sigma^2}{2} + \left.\frac{d^3\lambda}{d\sigma^3}\right]\frac{\sigma^3}{6} + \left.\frac{d^4\lambda}{d\sigma^4}\right]\frac{\sigma^4}{24} + \left.\frac{d^5\lambda}{d\sigma^5}\right]\frac{\sigma^5}{120} + \left.\frac{d^6\lambda}{d\sigma^6}\right]\frac{\sigma^6}{720} \tag{2}$$

$$\alpha' - \alpha = \left.\frac{d\alpha}{d\sigma}\right]\sigma + \left.\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2}\right]\frac{\sigma^2}{2} + \left.\frac{d^3\alpha}{d\sigma^3}\right]\frac{\sigma^3}{6} + \left.\frac{d^4\alpha}{d\sigma^4}\right]\frac{\sigma^4}{24} + \left.\frac{d^5\alpha}{d\sigma^5}\right]\frac{\sigma^5}{120} + \left.\frac{d^6\alpha}{d\sigma^6}\right]\frac{\sigma^6}{720} \tag{3}$$

Nach Ausführung der Differentiierungen ist in den erhaltenen Differential-Quotienten $\frac{d\varphi}{d\sigma}, \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}$ u. s. w. der Wert $\varphi' - \varphi = 0$ zu setzen, d. h. die Differential-Quotienten sind für den Ausgangs-Wert φ und ebenso für den Ausgangs-Wert α auszurechnen.

Die ersten Differential-Quotienten erhalten wir aus (1), (2), (3) § 61. S. 347, nämlich in der für uns geeigneten Form:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \cos\alpha \tag{4}$$

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \tag{5}$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi \tag{6}$$

Nun leiten wir (4) weiter ab, und finden, mit Zuziehung von (6):

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} = -\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\sigma} = -\sin^2\alpha \operatorname{tang}\varphi \tag{7}$$

Dieses nochmals abgeleitet giebt:

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -2\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\sigma}\operatorname{tang}\varphi - \sin^2\alpha\,(1 + \operatorname{tang}^2\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma}$$

also mit Rücksicht auf (6) und (4):

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -2\sin^2\alpha\cos\alpha \operatorname{tang}^2\varphi - \sin^2\alpha\cos\alpha\,(1 + \operatorname{tang}^2\varphi)$$

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -\sin^2\alpha\cos\alpha\,(1 + 3\operatorname{tang}^2\varphi) \tag{8}$$

Dieses wird abermals differentiiert:

$$\frac{d^4\varphi}{d\sigma^4} = (-2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha)\sin\alpha\, tang\,\varphi\,(1 + 3\, tang^2\varphi) \qquad (9)$$
$$-\sin^2\alpha\cos\alpha\; 6\, t\,(1 + t^2)\cos\alpha$$

$$\frac{d^4\varphi}{d\sigma^4} = \sin^4\alpha\, tang\,\varphi\,(1 + 3\, tang^2\varphi) - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\, tang\,\varphi\,(2 + 3\, tang^2\varphi) \qquad (10)$$

In dieser Weise kann man fortfahren, wir schreiben dabei wie gewöhnlich $tang\,\varphi = t$ und damit wird:

$$\frac{d^5\varphi}{d\sigma^5} = \sin^4\alpha\cos\alpha\,(1 + 30\,t^2 + 45\,t^4) - 4\sin^2\alpha\cos^3\alpha\,(2 + 15\,t^2 + 15\,t^4) \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^6\varphi}{d\sigma^6} = -\sin^6\alpha\, t\,(1 + 30\,t^2 + 45\,t^4) + 4\sin^4\alpha\cos^2\alpha\, t\,(22 + 135\,t^2 + 135\,t^4)\\ - 8\sin^2\alpha\cos^4\alpha\, t\,(17 + 60\,t^2 + 45\,t^4)\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Zu den Ableitungen von λ übergehend, haben wir nach (5):

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \qquad (13)$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\frac{d\alpha}{ds} + \sin\alpha\,\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds} \qquad (14)$$

also mit Berücksichtigung von (4) und (6):

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\varphi}\sin\varphi + \sin\alpha\,\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cos\alpha$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = 2\sin\alpha\cos\alpha\,\frac{tang\,\varphi}{\cos\varphi} = 2\sin\alpha\cos\alpha\, tang\,\varphi\,\sec\varphi \qquad (15)$$

Da man bald bemerkt, dass der Nenner $\cos\varphi$, oder der Faktor $\sec\varphi$ sich in allen Gliedern der Entwicklung von λ einstellt, und dass die Potenzen von $tang\,\varphi$ sich wie im vorigen Fall finden, schreibt man auch die Ableitung von $\sec\varphi$ stets in der Form $t\sec\varphi$, und damit bekommt man (überall $tang\,\varphi = t$ gesetzt) weiter:

$$\frac{d^3\lambda}{d\sigma^3} = 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha\; t\; t\sec\varphi$$
$$+ 2\sin\alpha\cos\alpha\,(1 + t^2)\sec\varphi\cos\alpha$$
$$+ 2\sin\alpha\cos\alpha\; t\; t\sec\varphi\cos\alpha$$

$$\frac{d^3\lambda}{d\sigma^3} = -\sin^3\alpha\sec\varphi\,(2\,t^2) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha\sec\varphi\,(1 + 3\,t^2) \qquad (16)$$

Auf diesem Wege findet man auch:

$$\frac{d^4\lambda}{d\sigma^4} = 8\sec\varphi\, t\left\{-\sin^3\alpha\cos\alpha\,(1 + 3\,t^2) + \sin\alpha\cos^3\alpha\,(2 + 3\,t^2)\right\} \qquad (17)$$

$$\frac{d^5\lambda}{d\sigma^5} = 8\sec\varphi\left\{\sin^5\alpha\,(t^2 + 3\,t^4) - \sin^3\alpha\cos^2\alpha\,(1 + 20\,t^2 + 30\,t^4)\right.$$
$$\left. + \sin\alpha\cos^4\alpha\,(2 + 15\,t^2 + 15\,t^4)\right\} \qquad (18)$$

$$\frac{d^6\lambda}{d\sigma^6} = 16\sec\varphi\, t\left\{\sin^5\alpha\cos\alpha\,(2 + 30\,t^2 + 45\,t^4) - \sin^3\alpha\cos^3\alpha\,(26 + 150\,t^2 + 150\,t^4)\right.$$
$$\left. + \sin\alpha\cos^5\alpha\,(17 + 60\,t^2 + 45\,t^4)\right\} \qquad (19)$$

In ähnlicher Weise erhält man auch die Ableitungen von α nach σ:

$$\frac{d\,\alpha}{d\,\sigma} = \sin\alpha\, t \tag{20}$$

$$\frac{d^2\,\alpha}{d\,\sigma^2} = \sin\alpha\cos\alpha\,(1+2\,t^2) \tag{21}$$

$$\frac{d^3\,\alpha}{d\,\sigma^3} = -\sin^3\alpha\, t\,(1+2\,t^2) + \sin\alpha\cos^2\alpha\, t\,(5+6\,t^2) \tag{22}$$

$$\frac{d^4\,\alpha}{d\,\sigma^4} = -\sin^3\alpha\cos\alpha\,(1+20\,t^2+24\,t^4) + \sin\alpha\cos^3\alpha\,(5+28\,t^2+24\,t^4) \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^5\,\alpha}{d\,\sigma^5} = {} & \sin^5\alpha\, t\,(1+20\,t^2+24\,t^4) - 2\sin^3\alpha\cos^2\alpha\, t\,(29+140\,t^2+120\,t^4)\\ & + \sin\alpha\cos^4\alpha\, t\,(61+180\,t^2+120\,t^4)\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^6\,\alpha}{d\,\sigma^6} = {} & \sin^5\alpha\cos\alpha\,(1+182\,t^2+840\,t^4+720\,t^6)\\ & -\sin^3\alpha\cos^3\alpha\,(58+1316\,t^2+3600\,t^4+2400\,t^6)\\ & +\sin\alpha\cos^5\alpha\,(61+662\,t^2+1320\,t^4+720\,t^6)\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Nun können wir die Formeln (1), (2), (3) zusammensetzen; wir wollen dieses jedoch hier nur bis zur 4. Ordnung thun, wir setzen dabei:

$$\sigma\sin\alpha = v \qquad \sigma\cos\alpha = u \qquad \tan\varphi = t \tag{26}$$

Wenn wir zugleich überall die nötigen ϱ zusetzen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\varphi' - \varphi = {} & u - \frac{1}{2\,\varrho}\, v^2\, t\\ & - \frac{1}{6\,\varrho^2}\, v^2\, u\,(1+3\,t^2)\\ & + \frac{1}{24\,\varrho^3}\, v^4\, t\,(1+3\,t^2) - \frac{1}{6\,\varrho^3}\, v^2\, u^2\, t\,(2+3\,t^2)\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda\cos\varphi = {} & v + \frac{1}{\varrho}\, v\, u\, t\\ & - \frac{1}{3\,\varrho^2}\, v^3\, t^2 + \frac{1}{3\,\varrho^2}\, v\, u^2\,(1+3\,t^2)\\ & - \frac{1}{3\,\varrho^3}\, v^3\, u\, t\,(1+3\,t^2) + \frac{1}{3\,\varrho^3}\, v\, u^3\, t\,(2+3\,t^2)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha' - \alpha = {} & v\, t + \frac{1}{2\,\varrho}\, v\, u\,(1+2\,t^2)\\ & - \frac{1}{6\,\varrho^2}\, v^3\, t\,(1+2\,t^2) + \frac{1}{6\,\varrho^2}\, v\, u^2\, t\,(5+6\,t^2)\\ & - \frac{1}{24\,\varrho^3}\, v^3\, u\,(1+20\,t^2+24\,t^4)\\ & + \frac{1}{24\,\varrho^3}\, v\, u^3\,(5+28\,t^2+24\,t^4)\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Hiebei sind die konstanten Coëfficienten-Logarithmen:

$$\left.\begin{aligned}& \log\frac{1}{\varrho} = 4.685\,575\;,\; \log\frac{1}{2\,\varrho} = 4.384\,545\;,\; \log\frac{1}{3\,\varrho^2} = 8.89403\;,\; \log\frac{1}{6\,\varrho^2} = 8.59300\\ & \log\frac{1}{3\,\varrho^3} = 3.579\,603\;,\; \log\frac{1}{6\,\varrho^3} = 3.278\,573\;,\; \log\frac{1}{24\,\varrho^3} = 2.676\,513\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Wir wollen hiernach unser kleines Normal-Beispiel berechnen, nämlich:

Gegeben: $\varphi = 49^\circ\, 30'\, 0''$ $\quad \alpha = 32^\circ\, 21'\, 1{,}291''$ $\quad \sigma = 1^\circ\, 11'\, 19{,}4819''$
$= 4279{,}4819''$

Für die von t abhängigen Coëfficienten kann man die Hilfstafel unseres Anhanges Seite [47]—[51] benützen, oder wenigstens zur Versicherung zuziehen.

In unserem Falle mit $\varphi = 49^\circ\, 30'$ hat man:

$$log\,(1 + 2\,t^2) = 0.573\,078 \quad log\,(1 + 3\,t^2) = 0.70865 \quad log\,(5 + 6\,t^2) = 1.12141$$
$$log\,(1 + 20\,t^2 + 24\,t^4) = 1.86642 \qquad log\,(5 + 28\,t^2 + 24\,t^4) = 1.94689$$

Im übrigen giebt die Ausrechnung nach den Formeln (27)—(29):

Breite		Länge		Azimut	
$+u =$	$+\,3615{,}2710''$	$+\,v\,sec\,\varphi =$	$+\,3525{,}9626''$	$v\,t =$	$+\,2681{,}1630''$
$-\,v^2\,t\ldots$	$-\,14{,}8830$	$+\,v\,u\,t\ldots$	$+\,72{,}3593$	$+\,v\,u\ldots$	$+\,75{,}0907$
$-\,v^2\,u\ldots$	$-\,0{,}3797$	$-\,v^3\ldots$	$-\,0{,}1986$	$-\,v^3\ldots$	$-\,0{,}2061$
$+\,v^4\ldots$	$+\,0{,}0008$	$+\,v\,u^2\ldots$	$+\,1{,}8460$	$+\,v\,u^2\ldots$	$+\,1{,}8155$
$-\,v^2\,u^2\ldots$	$-\,0{,}0093''$	$-\,v^3\,u\ldots$	$-\,0{,}0152$	$-\,v^3\,u\ldots$	$-\,0{,}0152$
$\varphi' - \varphi =$	$+\,3599{,}9998''$	$+\,v\,u^3\ldots$	$+\,0{,}0452$	$+\,v\,u^3\ldots$	$+\,0{,}0455$
	$= 0^\circ\, 59'\, 59{,}9998''$	$\lambda =$	$+\,3599{,}9993''$	$\alpha' - \alpha =$	$+\,2757{,}8934''$
			$= +\,0^\circ\, 59'\, 59{,}9993''$		$= +\,45'\, 57{,}8934''$

Wir könnten nun weiter untersuchen, wie viel die Glieder 5. Ordnung in gewissen Fällen ausmachen; da wir aber hierüber bereits in anderer Weise in § 63. (22), (23), (26) S. 356 uns Klarheit verschafft haben, wollen wir die Glieder 5. Ordnung unserer neuen Formeln übergehen, dagegen noch für *einen* Fall die Glieder 6. Ordnung in Betracht nehmen, nämlich für die Azimut-Berechnung, bei welcher nach (3) und (25) das Glied 6. Ordnung folgendes ist:

$$\varDelta\,\alpha_6 = \frac{\sigma^6}{720\,\varrho^5}\Big\{sin^5\,\alpha\,cos\,\alpha\,(1 + 182\,t^2 + 840\,t^4 + 720\,t^6)$$
$$-\,sin^3\,\alpha\,cos^3\,\alpha\,(58 + 1316\,t^2 + 3600\,t^4 + 2400\,t^6)$$
$$+\,sin\,\alpha\,cos^5\,\alpha\,(61 + 662\,t^2 + 1320\,t^4 + 720\,t^6)\Big\}$$

Um einen einfachen Fall zu haben, setzen wir die Breite $\varphi = 45^\circ$, also $t = tang\,\varphi = 1$, und damit wird:

$$\varDelta\,\alpha_6 = \frac{\sigma^6}{720\,\varrho^5}\Big\{1743\,sin^5\,\alpha\,cos\,\alpha - 7374\,sin^3\,\alpha\,cos^3\,\alpha + 2763\,sin\,\alpha\,cos^5\,\alpha\Big\}$$

Durch einige Versuche findet man, dass diese Funktion zwischen 0° und 90° zwei Maxima, etwa bei $\alpha = 16^\circ$ und $\alpha = 77^\circ$, und ein Minimum bei $\alpha = 47^\circ$ hat; das absolute Maximum ist bei 16°, und giebt:

$$(\varDelta\,\alpha_6)\,max = \frac{\sigma^6}{720\,\varrho^5}\,491$$

Setzt man $\sigma = 2^\circ = 7200''$, so erhält man:

$$(\varDelta\,\alpha_6)\,max = 0{,}00025''$$

Dagegen für $\sigma = 3^\circ$ erhält man schon $0{,}0029''$ und für $\sigma = 4^\circ$ erhält man $0{,}0162''$.

Aus all diesem ziehen wir folgende Schlüsse:

Die Glieder 6. Ordnung werden bei Ausdehnung von mehreren Graden bereits merkbar, namentlich in höheren Breiten, wo die Glieder mit t^2, t^4, t^6 sehr rasch wachsen. Da nun schon die Glieder 5. Ordnung ungemein beschwerlich sind, empfehlen sich sphärische Reihen-Entwicklungen höchstens bis zur 4. Ordnung einschliesslich, z. B. die Gauss schen Mittelbreiten-Formeln (16)—(19) § 62. S. 350, welche äusserlich nur Glieder bis zur dritten Ordnung enthalten, aber wegen des Mittel-Arguments noch um einen Grad genauer, d. h. auf Glieder 4. Ordnung einschliesslich genau sind.

Hat man Fälle mit Ausdehnung etwa über 2°, für welche nach S. 356 die Glieder 5. Ordnung bereits merkbar sind, so thut man besser, nach den geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie mit 8—10 stelligen Logarithmen zu rechnen, als die viel grössere Mühe der Glieder 5. oder gar 6. Ordnung aufzuwenden.

Von diesen Überlegungen werden wir auch später bei den sphäroidischen Berechnungen Gebrauch machen.

Kapitel VI.

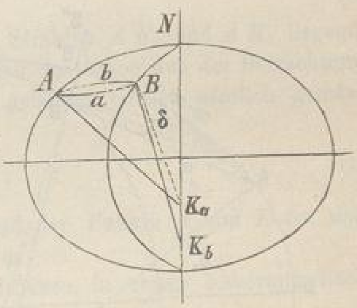
Normalschnitte und geodätische Linie.

§ 65. Gegen-Normalschnitte.

Der wichtigste Schritt, den wir in unserer geodätischen Theorie vorwärts zu machen haben, besteht in der Erkenntnis, dass zwischen zwei Punkten des Sphäroids im allgemeinen *zwei* Normalschnitte bestehen.

Es seien in Fig. 1. A und B zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, unter verschiedenen Breiten, und es sei $A\,K_a$ die Flächen-Normale im Punkte A, sowie $B\,K_b$ die Flächen-Normale im Punkte B; hiebei bemerkt man zuerst, dass die Punkte, in welchen die Umdrehungsaxe von diesen Normalen getroffen wird, d. h. K_a und K_b, bei schiefem Schnitte *nicht* zusammenfallen.

Fig. 1.



Ebenso wie man im allgemeinen *zwei* Axen-Schnittpunkte K_a und K_b hat, bestehen auch *zwei* Normalschnitt-Ebenen, welche beide durch die Normalen der Punkte A und B gehen.

Dieses verhält sich genauer so:

Die Normalschnitt-Ebene im Punkte A ist diejenige Ebene, welche durch die Normale $A\,K_a$ und durch den Punkt B geht; diese Ebene schneide die Ellipsoidfläche in einem Bogen $A\,a\,B$. Andererseits haben wir als Normalschnitt-Ebene im Punkte B diejenige Ebene, welche durch die Normale $B\,K_b$ und durch den Punkt A geht und die Ellipsoidfläche in dem Bogen $B\,b\,A$ schneidet.

Es giebt besondere Fälle, in welchen die beiden Normalschnitte zwischen zweien Punkten zusammenfallen:

Erstens. Für irgend zwei Punkte, die auf demselben Meridian liegen, ist dieser Meridian auch Normalschnitt in zweifachem Sinne. Hier ist auch der beson-