



## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 65. Gegen-Normalschnitte

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

wachsen. Da nun schon die Glieder 5. Ordnung ungemein beschwerlich sind, empfehlen sich sphärische Reihen-Entwicklungen höchstens bis zur 4. Ordnung einschliesslich, z. B. die Gauss'schen Mittelbreiten-Formeln (16)–(19) § 62. S. 350, welche äusserlich nur Glieder bis zur dritten Ordnung enthalten, aber wegen des Mittel-Arguments noch um einen Grad genauer, d. h. auf Glieder 4. Ordnung einschliesslich genau sind.

Hat man Fälle mit Ausdehnung etwa über  $2^\circ$ , für welche nach S. 356 die Glieder 5. Ordnung bereits merkbar sind, so thut man besser, nach den geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie mit 8–10 stelligen Logarithmen zu rechnen, als die viel grössere Mühe der Glieder 5. oder gar 6. Ordnung aufzuwenden.

Von diesen Überlegungen werden wir auch später bei den sphäroidischen Berechnungen Gebrauch machen.

## Kapitel VI.

### Normalschnitte und geodätische Linie.

#### § 65. Gegen-Normalschnitte.

Der wichtigste Schritt, den wir in unserer geodätischen Theorie vorwärts zu machen haben, besteht in der Erkenntnis, dass zwischen zwei Punkten des Sphäroids im allgemeinen *zwei* Normalschnitte bestehen.

Es seien in Fig. 1. *A* und *B* zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, unter verschiedenen Breiten, und es sei *AK<sub>a</sub>* die Flächen-Normale im Punkte *A*, sowie *BK<sub>b</sub>* die Flächen-Normale im Punkte *B*; hiebei bemerkt man zuerst, dass die Punkte, in welchen die Umdrehungsaxe von diesen Normalen getroffen wird, d. h. *K<sub>a</sub>* und *K<sub>b</sub>*, bei schiefem Schnitte *nicht* zusammenfallen.

Ebenso wie man im allgemeinen *zwei* Axen-Schnittpunkte *K<sub>a</sub>* und *K<sub>b</sub>* hat, bestehen auch *zwei* Normalschnitt-Ebenen, welche beide durch die Normalen der Punkte *A* und *B* gehen.

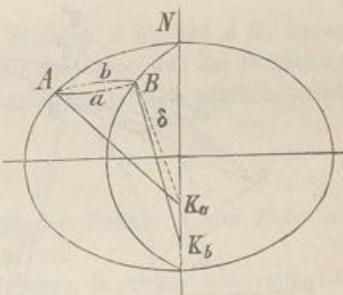
Dieses verhält sich genauer so:

Die Normalschnitt-Ebene im Punkte *A* ist diejenige Ebene, welche durch die Normale *AK<sub>a</sub>* und durch den Punkt *B* geht; diese Ebene schneide die Ellipsoidfläche in einem Bogen *AaB*. Andererseits haben wir als Normalschnitt-Ebene im Punkte *B* diejenige Ebene, welche durch die Normale *BK<sub>b</sub>* und durch den Punkt *A* geht und die Ellipsoidfläche in dem Bogen *BbA* schneidet.

Es giebt besondere Fälle, in welchen die beiden Normalschnitte zwischen zweien Punkten zusammenfallen:

*Erstens.* Für irgend zwei Punkte, die auf demselben Meridian liegen, ist dieser Meridian auch Normalschnitt in zweifachem Sinne. Hier ist auch der beson-

Fig. 1.

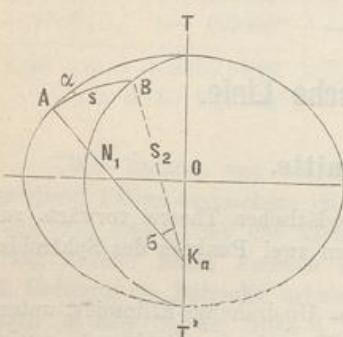


dere Fall inbegriffen, dass einer der beiden betrachteten Punkte in einem Pole der Erde liegt; wenn ein Pol der Erde als erster Punkt  $A$  gilt, und irgend ein anderer Erdpunkt als zweiter Punkt  $B$ , so ist der Meridian des Punktes  $B$  sowohl Normalschnitt von  $B$  nach  $A$ , als auch Normalschnitt von  $A$  nach  $B$ . Da jedoch die Erdpole nicht zugänglich sind, hat dieser Fall für uns keine praktische Bedeutung.

*Zweitens.* Wenn zwei Punkte unter gleichen Breiten  $\varphi$  liegen, so fallen auch die beiden Normalschnitt-Ebenen zusammen, weil dann die beiden Ax-Schnitte  $K_a$  und  $K_b$  der Normalen von  $A$  und von  $B$  nach Fig. 1, auf der Erdaxe identisch werden.

Wegen der Kleinheit der Abplattung unserer Erde ist das erkannte Auseinandergehen zweier Gegen-Normalschnitte für messbare Dreiecksseiten sehr gering, und wir haben bisher stillschweigend davon abgesehen, wenn wir die Erde als Kugel behandeln; aber zur Gewinnung eines richtigen Urteils hierüber ist es das erste Erfordernis, die Konvergenz der beiden Normalschnitte durch Rechnung zu bestimmen.

Fig. 2.



In Fig. 2. ist nochmals der eine von den beiden Schnitten gezeichnet, nämlich derjenige von  $A$  nach  $B$ , und es ist auch das Azimut  $\alpha$  dieses Schnittes in  $A$  angedeutet, sowie der Centriwinkel  $A K_a B = \sigma$ , welcher dem linearen Bogen  $A B = s$  entspricht und zwar in erster Näherung einfach als Kreisbogenrechnung:

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \quad (1)$$

wenn mit  $N_1$  der Quer-Krümmungs-Halbmesser  $A K_a$  in dem Punkte  $A$  bezeichnet wird.

Die beiden Schnitte  $A B$  und  $B A$  sind in

Fig. 3.

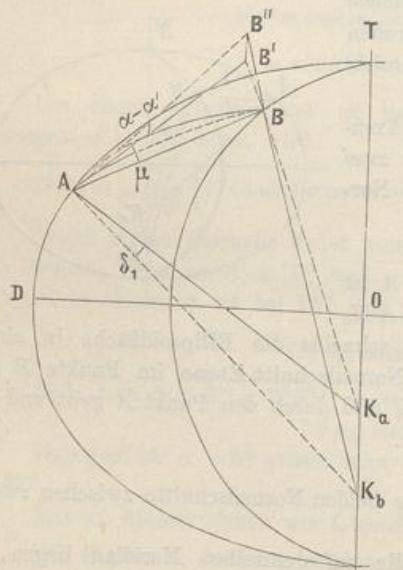


Fig. 4.

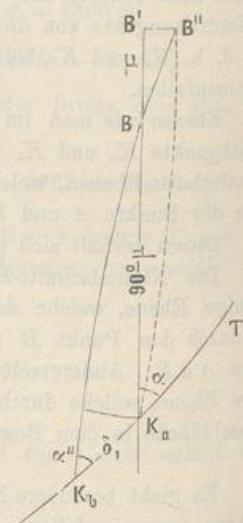


Fig. 3. nochmals gezeichnet mit zwei Tangenten  $AB'$  und  $AB''$ , von welchen  $AB'$  zu dem Schnitte  $AB$  und  $AB''$  zu dem Gegenschnitte  $BA$  gehört, so dass also  $B'AB'' = \alpha - \alpha'$  die gesuchte Konvergenz vorstellt.

Zugleich bedeutet  $B'AB = \mu$  den Winkel der Tangente  $AB'$  mit der Sehne  $AB$ , und wenn wir auf Fig. 2. und Gleichung (1) zurückblicken, erkennen wir leicht, dass in erster Näherung, (nämlich für  $AB$  als Kreisbogen um  $K$  als Mittelpunkt)

$\mu = \frac{\sigma}{2}$  ist, also (nach Fig. 5.):

$$\mu = \frac{\sigma}{2} = \frac{s}{2N_1} \quad (2)$$

Nun kommt die sphärische Fig. 4. in Betracht, welche dadurch entsteht, dass man um  $A$  als Mittelpunkt eine Kugelfläche mit beliebigem Halbmesser beschreibt, auf welcher jeder von  $A$  ausgehende Strahl sich als Punkt, und jede von  $A$  ausgehende Ebene sich als Grosskreisbogen zeigt.

Wir haben auch alle Punkte in Fig. 4. mit denselben Buchstaben bezeichnet, welche auf den entsprechenden Strahlen von Fig. 3. vorkommen, so dass also  $B$  in Fig. 4. dem Strahl  $AB$  von Fig. 3.  $K_a$  in Fig. 4. dem Strahle  $AK_a$  von Fig. 3. entspricht u. s. w.

Die Normalschnitt-Ebene  $ABK_a$  in Fig. 3. giebt den Bogen  $BK_a$  in Fig. 4. und die Meridian-Ebene  $ATK_aK_b$  von Fig. 3. giebt den Bogen  $T K_a K_b$  in Fig. 4., folglich ist der Winkel  $BK_a T = \alpha$  das Azimut der Normalschnitt-Ebene  $ABK_a$  im Punkte  $A$ .

In Fig. 4. ist auch der Winkel  $BK_b K_a = \alpha''$  eingeschrieben, welcher das Gegenzazimut  $\alpha'$  von Fig. 3. hinreichend darstellt, insofern  $\alpha''$  den Winkel zwischen der Gegenschnittebene  $BK_b A$  und der Meridianebene  $TA K_a K_b$  bedeutet, während allerdings  $\alpha'$  von Fig. 3. sich streng genommen auf die etwas anders liegende Schnittebene  $BK_a A$  bezieht. Diesen kleinen Unterschied ausser Betracht lassend, setzen wir in gleicher Näherung wie in den Gleichungen (1) und (2):

$$\alpha' = \alpha'' \quad (3)$$

Der kleine Winkel  $\delta$ , welcher zwischen den Strahlen  $AK_a$  und  $AK_b$  liegend, leicht aus Fig. 3. in Fig. 4. übertragen wird, ist eine uns schon aus der Betrachtung von § 54. über den verkürzten Breitenunterschied geläufige Grösse, nämlich gemäss (8) § 54. S. 303:

$$\delta_1 = \frac{\Delta\varphi}{V^2} \eta^2 \quad (4)$$

wobei  $\Delta\varphi$  in unserem Falle der Breitenunterschied der Punkte  $A$  und  $B$  ist, und wie gewöhnlich  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$  für die Mittelbreite  $\varphi$ .

Es ist auch leicht,  $\Delta\varphi$  in  $\sigma$  und  $\alpha$  auszudrücken, in erster Näherung nach dem Anblitze von Fig. 2. S. 303:

$$\frac{\Delta\varphi}{V^2} = \frac{\Delta\varphi'}{V^2} = \frac{s}{N} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$

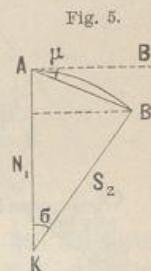
Also nach (4):

$$\delta_1 = \eta^2 \sigma \cos \alpha \quad (5)$$

Auf das sphärische Dreieck  $BK_a K_b$  von Fig. 4. werden wir eine Cotangential-Gleichung von S. 164 anwenden:

$$\cotg(90^\circ - \mu) \sin \delta_1 = \cos \delta_1 \cos(180^\circ - \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha) \cotg \alpha'' \quad (6)$$

$$\tang \mu \sin \delta_1 = -\cos \delta_1 \cos \alpha + \sin \alpha \cotg \alpha''$$



oder weil  $\mu$  und  $\delta_1$  klein sind

$$\mu \delta_1 = -\cos \alpha + \sin \alpha \cotg \alpha'' = -\frac{-\cos \alpha \sin \alpha'' + \sin \alpha \cos \alpha''}{\sin \alpha''}$$

$$\mu \delta_1 \sin \alpha'' = \sin(\alpha - \alpha'') = \alpha - \alpha''$$

Zurückschauend nach (5), (4) und (3) hat man hieraus:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \quad (7)$$

Fig. 6.

Hier hat der zweite Faktor die geometrische Bedeutung, wie in Fig. 6. angedeutet ist, weshalb wir setzen:

$$\frac{\sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \varepsilon \quad (8)$$

Dieser Wert  $\epsilon$  ist genähert der sphärische (oder sphäroidische) Excess eines Dreiecks  $A B C$ , welches bei  $C$  rechtwinklig ist, so dass  $BC$  nicht ein Parallel-Kreisbogen, sondern ein Bogen rechtwinklig zum Meridian  $ACN$  ist; doch kann in erster Näherung für die Fläche des Dreiecks  $A B C$  auch  $BC$  als Parallelbogen gelten.

Mit dieser Hilfs-Bezeichnung  $\varepsilon$  nach (8) lautet unsere Formel (7) kurz:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \epsilon \quad (9)$$

Dieselbe Formel (9), welche hier für  $\alpha - \alpha'$  gefunden wurde, gilt in gleicher Näherung auch für die Azimut-Differenz in dem zweiten Punkte  $B$ ; also wenn dort die Azimute mit  $\beta$  bezeichnet werden, wird sein:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \eta^2 \varepsilon \quad (10)$$

Nimmt man beispielshalber eine Entfernung  $s = 100\,000^m$  unter dem Azimut  $\alpha = 45^\circ$ , zugleich unter der Breite  $\varphi = 45^\circ$ , so wird:

$$\epsilon = 12,7'' \quad \alpha - \alpha' = 0,043'' \quad (11)$$

Damit haben wir unseren Hauptzweck erreicht. Wir wissen nun, dass die Konvergenz der beiden Gegenschnitte sich in geringen Beträgen von wenigen Hundertel-Sekunden bewegt, so lange die Dreiecksseiten die Grenze von  $100^{\text{km}}$  nicht überschreiten, und damit ist die früher ohne Kenntnis dieser Verhältnisse angenommene *sphärische* Triangulierung von § 40.—43., bei welcher die  $\alpha - \alpha'$  einfach vernachlässigt werden, genügend gerechtfertigt.

### Querabstand der beiden Schnittbögen.

Es wird noch zur Veranschaulichung dienen, den linearen Querabstand  $q$  zu bestimmen, welchen die beiden Normalschnitte auf der Erdoberfläche in der Mitte ihres Verlaufes zwischen sich lassen; und dazu brauchen wir zuerst den Winkel, den die beiden Schnittebenen unter sich bilden.

Dieser Schnittwinkel  $\nu$  ist in Fig. 8. veranschaulicht. Denkt man sich in der Mitte der Sehne  $AB$  (Fig. 7.) eine Ebene  $KCD$  rechtwinklig gelegt, so wird diese ein nahezu gleichschenkliges kleines Dreieck ausschneiden (Fig. 8.), dessen beide

Schenkel  $p$  den Winkel  $\nu$  zwischen sich fassen und den Querabstand  $q$  dem Winkel  $\nu$  gegenüber haben. Die Schenkellänge  $p$  ist gleich der Pfeilhöhe eines Bogens  $s$  für den Halbmesser  $N$ , d. h. nach Fig. 7.:

$$p = \frac{s^2}{8N} \quad (12)$$

Fig. 7.

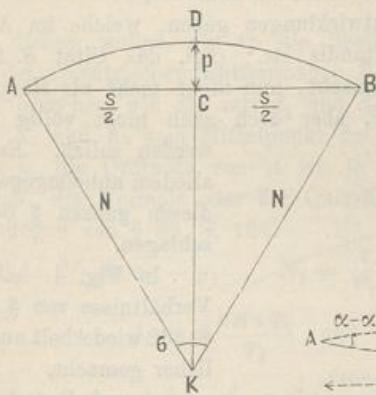
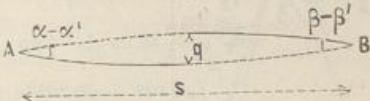


Fig. 8.



Fig. 9.



Was den Schnittwinkel  $\nu$  betrifft, so ist dieser in Fig. 4. S. 362 der kleine Winkel bei  $B$ , unter dem sich die beiden Ebenen  $B'BK_a$  und  $B''BK_b$  schneiden ( $\nu$  ist in Fig. 4. S. 362 nicht eingeschrieben, aber in Fig. 2. des folgenden § 67 S. 368). Man entnimmt also leicht genähert:

$$\sin \nu \text{ oder } \tan \nu = \frac{\delta_1 \sin \alpha''}{\sin (90^\circ - \mu)} = \frac{\delta_1 \sin \alpha}{\cos \frac{\sigma}{2}} \quad (13)$$

oder wegen (5) und (8) hinreichend genau:

$$\nu = \eta^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha = 2 \eta^2 \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (14)$$

Da nach Fig. 8. der kleine Querabstand  $q = p \nu$  ist, hat man also aus (12) und (13):

$$q = \frac{s}{4} \eta^2 \epsilon \text{ bzw. } = \frac{s}{4} \eta^2 \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (15)$$

Die Ausrechnung mit denselben Annahmen wie bei (10) und (11); nämlich  $\eta = 45^\circ$  und  $\alpha = 45^\circ$ ,  $s = 100000^m$  giebt:

$$q = 0,005^m \quad (16)$$

Dieses Zahlenbeispiel entspricht ungefähr der Linie Hannover-Brocken. Wenn man also von Hannover nach dem Brocken eine Gerade feldmesserisch einweisen und mit Backen und Fahnen abstecken würde, und wenn man dasselbe umgekehrt vom Brocken nach Hannover ausführte, so würden wegen der Abplattung der Erde die beiden abgesteckten Linien nicht zusammenfallen, sondern in der Mitte des Verlaufes (in der Gegend von Salzgitter) um 5 Millimeter aneinander vorbeigehen.

Dieses handgreifliche Beispiel zeigt am besten die Zulässigkeit geodätischer Vernachlässigung dieser Abweichung.