



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 66. Konvergenzwinkel in zweiter Näherung

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

### § 66. Konvergenzwinkel in zweiter Näherung.

Obgleich die Bestimmung von  $\alpha - \alpha'$  in erster Näherung  $= \eta^2 \varepsilon$  im vorigen § 65. für alle praktischen Zwecke vollauf genügt und es auch gar nicht theoretisch ratsam ist, diese Sache alsbald weiter zu verfolgen, wollen wir doch die Näherung  $\alpha' = \alpha''$ , welche in (3) § 65. S. 365 angenommen wurde, noch näher untersuchen, um vor jedem theoretischen Einwand geschützt zu sein.

Wir wollen hier auch einige Entwicklungen geben, welche im Anschluss an Bohnenbergers Abhandlung „De computandis etc.“ (vgl. das Citat S. 274) in der vorigen 3. Auflage 1890, § 67.—68. gemacht, nun nicht mehr als Hauptbestandteil unseres Entwicklungsganges genommen, aber doch auch nicht völlig weggelassen

werden sollen. Es mag nach alledem anheimgegeben werden, diesen ganzen § 66. zu überschlagen.

In Fig. 1. haben wir die Verhältnisse von § 65. Fig. 3. S. 362 wiederholt und noch deutlicher gemacht.

$A$  und  $B$  sind zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, auf zwei Meridianen  $TA$  und  $TB$ , welche bei  $T$  den Längenunterschied  $\lambda$  zwischen sich fassen.

Die Breite von  $A$  sei  $\varphi_1$  und die Breite von  $B$  sei  $\varphi_2$ ; ferner sei  $AK_a$  die Normale von  $A$  und  $AK_b$  die Normale von  $B$ .

Die Breiten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  kommen bei  $K_a$  und  $K_b$  zum Ausdruck, denn es ist:

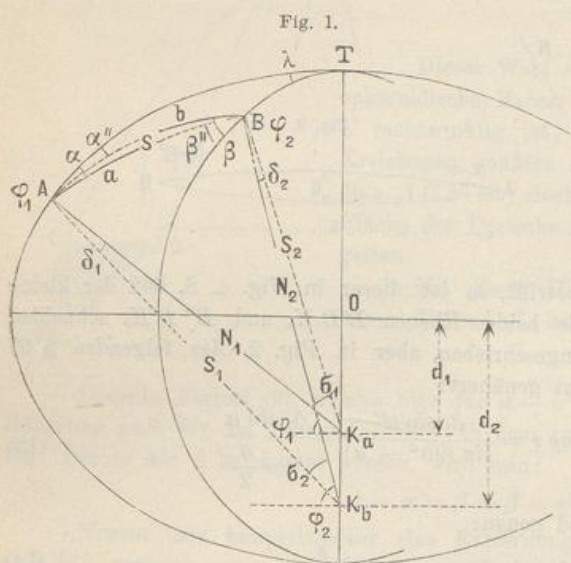
$$\text{Winkel } AK_aT = 90^\circ - \varphi_1 \text{ und } BK_bT = 90^\circ - \varphi_2 \quad (1)$$

Ein Theodolit, in  $A$  richtig aufgestellt, wird seine vertikale Axe nach  $AK_a$  gerichtet haben, und die Sicht nach  $B$  wird in  $AaB$  erfolgen unter dem Azimut  $\alpha$ . Zieht man auch noch  $K_aB$ , so ist das nicht Normale in  $B$ , allein man hat nun doch ein Dreikant  $K_aABT$  mit der Spitze  $K_a$ , auf welches die sphärische Trigonometrie angewendet werden kann.

Während  $\alpha$  und  $\beta$  zweifellos Azimute in dem bisherigen Sinne sind, d. h. Winkel zwischen Normalschnitten und einem Meridiane, und zwar sowohl für das Ellipsoid als auch für die beiden sphärischen Dreiecke, in welchen  $\alpha$  und  $180 - \beta$  vorkommen, ist dieses bei  $\alpha'$  und  $\beta'$  nur noch der Fall für die sphärischen Hilfsdreiecke, aber nicht mehr für das Ellipsoid.

Z. B. der Winkel  $\alpha''$  kann als Azimut des Schnittes  $AbB$  in  $A$  bezeichnet werden, allein nur bei Annahme eines fingierten Erdmittelpunktes  $K_b$ , welcher gar nicht in der Normalen von  $A$  liegt.

In Bezug auf das Ellipsoid hat der ebene Schnitt  $AbBK_b$  im Punkte  $A$  überhaupt kein Azimut in dem gewöhnlichen Sinne, und wenn man dem Bogen  $AbB$





dennoch auch in  $A$  ein ellipsoidisches Azimut zuteilen will, so kann man nur die *Tangente* des Bogens  $AbB$  in  $A$  betrachten, indem man durch diese Tangente und die Normale  $AK_a$  eine Ebene legt, welche mit der Meridian-Ebene  $AT$  einen *anderen* Winkel  $\alpha'$  bildet (der in Fig. 1. nicht angegeben ist).

Man kann schon jetzt überblicken, dass die beiden hier genannten Winkel  $\alpha'$  und  $\alpha''$  nur sehr wenig von einander verschieden sind; zunächst kam es nur darauf an, die geometrischen Begriffe völlig klar zu legen.

Nach diesem wollen wir an die Bestimmung der beiden kleinen Winkel  $\delta_1$  und  $\delta_2$  und der excentrischen Entfernungen  $S_1$  und  $S_2$  gehen.

Hiezu brauchen wir die mit  $d_1$  und  $d_2$  in Fig. 1. eingeschriebenen Abstände der Schnitte  $K_a$  und  $K_b$  vom Mittelpunkt des Ellipsoids.

Wenn  $y_1$  die Ordinate von  $A$  ist, in dem Sinne der früheren Fig. 1. § 31. S. 188, und  $N_1$  die Normale oder der Quer-Krümmungs-Halbmesser  $AK_a$ , so ist mit den Bezeichnungen von § 32. S. 194:

$$d_1 = N_1 \sin \varphi_1 - y_1, \quad N_1 = \frac{c}{V_1}, \quad y = \frac{c(1-e^2) \sin \varphi_1}{V_1} \quad (2)$$

$$\text{also:} \quad d_1 = e^2 \frac{c \sin \varphi_1}{V_1} \quad \text{und} \quad d_2 = e^2 \frac{c \sin \varphi_2}{V_2} \quad (3)$$

$$\text{also:} \quad d_2 - d_1 = e^2 c \left( \frac{\sin \varphi_2}{V_2} - \frac{\sin \varphi_1}{V_1} \right) \quad (4)$$

Die schmalen Dreiecke  $AK_a K_b$  und  $BK_a K_b$  von Fig. 1. geben:

$$\tan \delta_1 = \frac{(d_2 - d_1) \cos \varphi_1}{N_1 + (d_2 - d_1) \sin \varphi_1} \quad \text{und} \quad \tan \delta_2 = \frac{(d_1 - d_2) \cos \varphi_2}{N_2 + (d_1 - d_2) \sin \varphi_2} \quad (5)$$

In gleicher Weise kann man auch die Entfernungen  $S_1$  und  $S_2$  nach Fig. 1. bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} S_1^2 &= N_1^2 + (d_2 - d_1)^2 + 2 N_1 (d_2 - d_1) \sin \varphi_1 \\ S_2^2 &= N_2^2 + (d_1 - d_2)^2 + 2 N_2 (d_1 - d_2) \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Man kann alle diese Formeln auch in Reihen entwickeln, wie in unserer 3. Auflage 1890, S. 349—351 geschehen ist.

Es ist aber darauf aufmerksam zu machen, dass die vorstehenden Formeln (2)—(6) streng gültig sind für beliebig weit entfernte Erdorte. Auch der Depressionswinkel  $\mu$  kann nach Fig. 5. § 66. streng angegeben werden durch:

$$\tan(90^\circ - \mu) = \frac{S_2 \sin \sigma}{N_1 - S_2 \cos \sigma} \quad \text{oder} \quad \tan \mu \sin \sigma = \frac{N_1}{S_2} - \cos \sigma \quad (7)$$

Solche strenge Formeln könnten etwa in Frage kommen bei Mondbeobachtungen. Vgl. hiezu auch: „Über das Geoid, von J. Bischoff, München 1889“.

Wir haben hiezu ein Zahlen-Beispiel berechnet:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 49^\circ 30' & \varphi_2 &= 50^\circ 30' \\ \text{Mittel } \varphi &= 50^\circ 0' & \text{Differenz } \Delta \varphi &= 1^\circ = 3600' \end{aligned} \right\}$$

Damit wurde sowohl nach den geschlossenen Formeln als nach verschiedenen Reihen berechnet:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= 10,06\,958'' & \delta_2 &= 9,86\,285'' \\ \frac{S_1}{N_1} &= 1,000\,057\,1638 & \frac{S_2}{N_2} &= 0,999\,941\,9985 \\ \log \frac{S_1}{N_1} &= 0,000\,0248\,252 & \log \frac{S_2}{N_2} &= 9,999\,9748\,096 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$



Die beiden sphärischen Dreiecke haben ergeben:

$K_a A B T$	$K_b A B T$	
$\varphi_1 = 49^\circ 30' 0''$ , $\lambda = 1^\circ 0' 0''$	$\varphi_2 = 50^\circ 30' 0''$ , $\lambda = 1^\circ 0' 0''$	(9)
$\varphi_2 - \delta_2 = 50^\circ 29' 50,13715''$	$\varphi_1 + \delta_1 = 49^\circ 30' 10,06958''$	
$\alpha = 32^\circ 25' 21,5294''$	$\alpha' = 32^\circ 25' 21,4739''$	
$\beta'' = 33^\circ 11' 19,3674''$	$\beta = 33^\circ 11' 19,4237''$	
$\sigma_1 = 1^\circ 11' 11,22445''$	$\sigma_2 = 1^\circ 11' 10,97855''$	

Hieraus ziehen wir auch die Differenzen:

$$\alpha - \alpha' = 0,0555'' \qquad \beta - \beta'' = 0,0563'' \qquad (10)$$

Der im vorigen § 65. mit  $\alpha'$  bezeichnete Winkel ist hier gar nicht vorgekommen; um auch zu diesem zu gelangen, haben wir in nachstehender Fig. 2. im wesentlichen die Verhältnisse der früheren Fig. 4. § 65. S. 362 wiederholt.

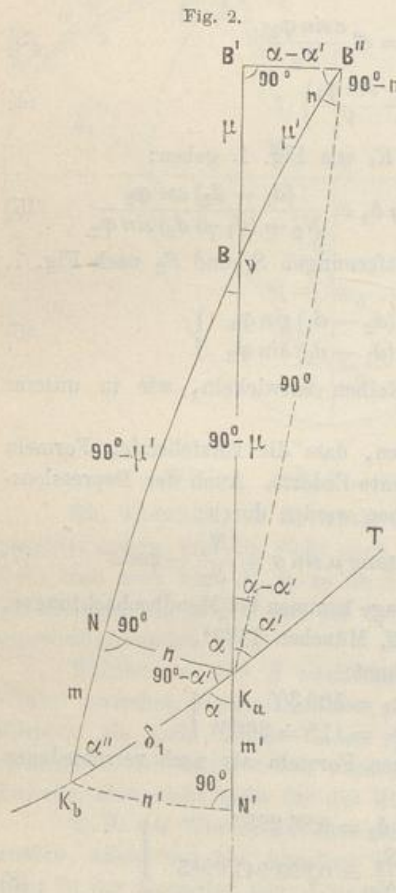
Das Azimut  $\alpha'$ , welches der Gegen-Normalschnitt  $B K_b A$  in  $A$  hat (vgl. Fig. 2. S. 362) ist als Winkel zweier Ebenen zunächst nicht vertreten, weil die Ebene  $B K_b A$  in  $A$  nicht normal ist. Allerdings bildet diese Ebene  $B K_b A$  mit der Meridian-Ebene von  $A$  einen gewissen Winkel  $\alpha''$ , welchen wir schon kennen gelernt haben, und von dem wir auch schon wissen, dass er nahezu gleich dem Azimute  $\alpha'$  ist; und jenen Winkel  $\alpha''$  finden wir in Fig. 2. leicht wieder, nämlich bei  $K_b$  zwischen dem Meridianbogen  $K_b K_a T$  und dem Gegen-Schnittbogen  $K_b B$ .

Das Gegen-Azimut  $\alpha'$  selbst muss zunächst in Fig. 3. S. 362 dadurch konstruiert werden, dass man die Tangente  $A B''$  an die Gegen-Schnittkurve  $B A$  in  $A$  zieht; und wenn man gleichzeitig auch die Tangente  $A B'$  an den Schnittbogen  $A B$  in  $A$  zieht, so liegen diese beiden Tangenten in der Berührungs-Ebene des Punktes  $A$ , und fassen den kleinen Winkel  $\alpha - \alpha'$  zwischen sich.

Auf diesem Wege ist die Differenz  $\alpha - \alpha'$  auch leicht in unsere neue Fig. 2. hinüber zu tragen; man macht den Bogen  $B B'$  entsprechend dem Depressions-Winkel  $\mu$  der Sehne  $A B$  gegen die Tangente  $A B'$ , dann  $B' B''$  rechtwinklig zu  $B B'$ , worauf sich  $B''$  als Schnitt der Horizontalen  $B' B''$  mit der Schiefen  $K_b B B''$  ergibt.

Indessen kann man nicht nur diese kleine Differenz  $\alpha - \alpha'$ , sondern auch das Azimut  $\alpha'$  selbst in Fig. 2. auffinden, indem man den Bogen  $B'' K_a$  zieht, welcher der Ebene  $B'' A K_a$  entspricht, und mit dem Meridian  $K_a T$  das fragliche Azimut  $\alpha'$  macht.

Der in Fig. 2. gezogene Bogen  $B'' K_a$  ist  $= 90^\circ$ , weil die Strahlen  $A B''$





und  $A K_a$  in Fig. 3. S. 362 als Tangente und als Normale des Ellipsoids auf einander rechtwinklig sind, und ebenso ist auch  $B' K_a = 90^\circ$ , also  $B K_a = 90^\circ - \mu$ .

Nun wollen wir noch den kurzen Bogen  $K_a N$  rechtwinklig zu  $B'' K_b$  ziehen, wodurch auch  $B'' N = 90^\circ$  und folglich der Bogen  $K_a N = n$ , gleich dem Winkel  $n$  bei  $B''$  wird.

Dieses  $n$  ist der Neigungs-Winkel der Normalen  $A K_a$  gegen die Gegensechnitt-Ebene  $B A K_b$ , und eine entsprechende Neigung  $n'$  kann man  $K_b N' = n'$  ebenfalls angeben, d. h. den Neigungs-Winkel  $n'$ , welchen die jenseitige Normale  $B K_b$  mit der diesseitigen Normalschnitt-Ebene  $A B K_a$  bildet.

Unsere Fig. 2. zeigt bei  $B$  den Winkel  $r$ , welchen die beiden Normalschnitt-Ebenen unter sich bilden, und endlich haben wir noch die kleine Seite  $K_a K_b = \delta_1$  entsprechend dem kleinen Winkel  $K_a A K_b = \delta_1$  in Fig. 1., den wir auch schon früher kennen gelernt haben.

Nachdem wir so alle Winkel, die uns hier interessieren, in den sphärischen Dreiecken von Fig. 2. dargestellt haben, können wir alle Beziehungen, welche zwischen diesen Winkeln bestehen, durch die sphärische Trigonometrie aus Fig. 2. ableiten.

Wir gehen zuerst darauf aus, die Differenz  $\alpha - \alpha''$  zu bestimmen; hiezu giebt eine Cotangenten-Gleichung S. 164, auf das Dreieck  $B K_a K_b$  angewendet, genau wieder wie in (6) § 65. S. 363:

$$\begin{aligned} \cotg (90^\circ - \mu) \sin \delta_1 &= \cos \delta_1 \cos (180^\circ - \alpha) + \sin (180^\circ - \alpha) \cotg \alpha'' \\ \tan \mu \sin \delta_1 &= -\cos \delta_1 \cos \alpha + \sin \alpha \cotg \alpha'' \\ \tan \mu \sin \delta_1 &= \left( 2 \sin^2 \frac{\delta_1}{2} - 1 \right) \cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha''}{\sin \alpha''} \\ \tan \mu \sin \delta_1 - 2 \cos \alpha \sin^2 \frac{\delta_1}{2} &= \frac{\sin (\alpha - \alpha'')}{\sin \alpha''} \end{aligned} \quad (11)$$

Dadurch ist  $\alpha - \alpha''$  bestimmt; und um auch die Differenz  $\alpha'' - \alpha'$  zu finden, betrachten wir das kleine rechtwinklige Dreieck  $K_a K_b N$ , dessen sphärischer Excess gerade zu  $\alpha'' - \alpha'$  ist, denn der Winkel dieses rechtwinkligen Dreiecks bei  $K_a$  ist  $= 90^\circ - \alpha'$ , weil  $K_a B''$  rechtwinklig auf  $K_a N$  steht; es ist also:

$$\alpha'' + (90^\circ - \alpha') = 90^\circ + (\alpha'' - \alpha') \quad (12)$$

Hiefür giebt die Hypotenusen-Formel S. 164:

$$\begin{aligned} \cotg \alpha' \cotg (90^\circ - \alpha') &= \cos \delta_1 \\ \cos \alpha'' \sin \alpha' &= \sin \alpha'' \cos \alpha' \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta_1}{2} \right) \\ \sin (\alpha'' - \alpha') &= 2 \sin^2 \frac{\delta_1}{2} \sin \alpha'' \cos \alpha' \end{aligned} \quad (13)$$

Nachdem durch (11) und (13) auch  $\alpha - \alpha'$  bestimmt ist, erhält man aus dem oberen rechtwinkligen Dreieck  $B B' B''$  in Fig. 2.:

$$\tan r = \frac{\tan (\alpha - \alpha')}{\sin \mu} \quad (14)$$

und

$$\tan n = \frac{\sin (\alpha - \alpha')}{\tan \mu} \quad (15)$$

oder aus dem Dreieck  $B K_a N$ :

$$\sin n = \sin r \cos \mu \quad (16)$$



Dadurch ist  $n$  zweifach bestimmt, wie überhaupt noch manche Kontrollgleichung aus Fig. 2. abgelesen werden kann (wozu noch  $\mu'$ ,  $m$  und  $m'$  eingeschrieben sind). Um  $n$  und  $n'$  auch unmittelbar in  $\delta_1$  auszudrücken, hat man aus den kleinen rechtwinkligen Dreiecken  $K_a K_b N$  und  $K_a K_b N$  in Fig. 3.:

$$\sin n = \sin \delta_1 \sin \alpha'' \quad \sin n' = \sin \delta_1 \sin \alpha \quad (17)$$

Um zur Entwicklung von  $\alpha - \alpha'$  zu gelangen, haben wir zuerst aus (11):

$$\alpha - \alpha' = \left( \mu \delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha \quad (18)$$

Der von der Breiten-Verkürzung herrührende Winkel  $\delta_1$  muss aus der geschlossenen Formel (5) für  $\delta_1$  auf S. 367 entwickelt werden, was hier nicht näher im Einzelnen dargelegt wird; das Ergebnis ist:

$$\delta_1 = \eta^2 \Delta \varphi' \left( 1 + \frac{\Delta \varphi'}{2} t \right)$$

Dabei ist gesetzt:

$$\frac{\Delta \varphi}{V^2} = \Delta \varphi' \quad , \quad \tan \varphi = t$$

Auch der Depressionswinkel  $\mu$  wird nach (7) genauer gebraucht, was als Reihen-Entwicklung hier nicht nachgewiesen wird (3. Auflage 1890, S. 360—361). Das Schlussresultat ist:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{s}{2N} \sin \alpha_m \quad (19)$$

Dabei bezieht sich  $\eta^2$  auf die Mittelbreite, wie auch  $\alpha_m$  das Mittel-Azimet ist. Weiter wurde gefunden:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{s}{2R} \sin \alpha_m \quad (20)$$

$$\alpha' - \alpha' = \eta^4 \Delta \varphi' \frac{s}{2N} \sin \alpha \cos^2 \alpha \quad (21)$$

Der Unterschied von  $\alpha - \alpha'$  gegen  $\alpha - \alpha''$  nach (20) und (19) besteht darin, dass bei (19) der Quer-Krümmungs-Halbmesser  $N$  im Nenner steht, dagegen bei (20) der Krümmungs-Halbmesser  $R$  in der Richtung des Bogens  $AB$ .

Diese Formeln sind genau auf Glieder von der Ordnung  $\eta^2 \sigma^3$  und  $\eta^4 \sigma^2$  einschliesslich.

Die letzte Differenz  $\alpha'' - \alpha'$  nach (21) hat den Faktor  $\eta^4$ , ist also von nächster Ordnung im Vergleich zu  $\alpha - \alpha'$  und  $\alpha - \alpha''$ .

Die Ausrechnung nach diesen Formeln hat für das Zahlenbeispiel (7)–(10) ergeben:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = 0,0560'' \quad (22)$$

Um dieses mit  $\alpha - \alpha'' = 0,0555''$  und mit  $\beta - \beta'' = 0,0563$  nach (10) S. 368 zu vergleichen, sollte man noch die Reduktion  $\alpha'' - \alpha'$  nach (21) anbringen, welche aber nur 0,0001'' bringt, und neben unserer weniger genauen trigonometrischen Rechnung zu vernachlässigen ist. Hiernach stimmt (22) genügend mit dem früheren (10) S. 368.

#### Ellipsenbogen der Normalschnitte.

In Fig. 3. ist nochmals der ebene Schnitt  $ABK_a$  von Fig. 1. dargestellt, und wir möchten noch die elliptische Bogenlänge  $AB = s$  kennen lernen, ohne jedoch die Einzelheiten der Reihen-Entwicklung (von 3. Auflage 1890, S. 353—354) herzusetzen. Aus den Gleichungen (6) muss es möglich sein, zu entwickeln:



$$\frac{S_2}{N_1} = 1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha \quad (23)$$

Dadurch ist die Kurve  $AB$  (Fig. 3.) in Polar-Coordinationen bestimmt, und um  $s$  in  $\sigma$  auszudrücken, hat man nur die Bogenlänge  $s$  durch Integration zu finden. Hierzu giebt Fig. 3. die Differential-Gleichung:

$$ds^2 = (S_2 d\sigma)^2 + (dS_2)^2 \quad (24)$$

Hier ist  $S_2$  als Funktion der Veränderlichen  $\sigma$  nach (24) einzuführen;  $N_1$  ist konstant, und auch  $\alpha$  und  $\eta^2$  gelten hier als konstant. Man hat daher aus (23):

$$\frac{dS_2}{d\sigma} = -N_1 \eta^2 \cos^2 \alpha \sigma \quad , \quad (dS_2)^2 = \eta^4 \dots d\sigma^2 \quad (25)$$

Wenn wir Glieder mit  $\eta^4$  vernachlässigen, können wir (24) kurz so schreiben:

$$ds = S_2 d\sigma = N_1 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha\right) d\sigma$$

Die Integration mit den Grenzen  $\sigma = 0$  und  $\sigma = \sigma$  giebt:

$$s = N_1 \left(\sigma - \frac{\eta^2}{6} \sigma^3 \cos^2 \alpha\right)$$

oder auch:

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \sigma^2 \cos^2 \alpha\right) \quad (26)$$

Das Korrektionsglied beträgt  $\frac{\eta^2}{6} \left(\frac{s}{N_1}\right)^3 \cos^2 \alpha \varphi''$  in Sekunden. Mit  $\varphi = \alpha = 45^\circ$  und  $s = 100\,000^m$  giebt dieses nur  $0,0002''$  (man kann daher bei einzelnen Dreiecksseiten das zweite Glied von (26) vernachlässigen).

Nach dem Satz von der verkürzten Breitendifferenz (8) § 54. S. 303 kann man hier setzen  $\sigma \cos \alpha = \frac{\Delta \varphi}{V^2} = \Delta \varphi'$ , also wird (26):

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \Delta \varphi'^2\right) \quad \text{oder} \quad s = N_1 \sigma \left(1 - \frac{\eta^2}{6} \Delta \varphi'^2\right) \quad (27)$$

In dieser Form haben wir das Zahlen-Beispiel (7)–(9) S. 368 behandelt und berechnet:

$$s = N_1 \sigma_1 (1 - \dots) = 132\,315,392^m - 0,019^m = 132\,315,373^m \quad (28)$$

$$s = N_2 \sigma_2 (1 - \dots) = 132\,315,394^m - 0,019^m = 132\,315,375^m \quad (29)$$

Das Korrektionsglied von (27) macht also hier nur etwa 2 Centimeter aus. Die beiden Werte  $s$  nach (28) und (29) sind innerhalb der Rechenschärfe als *gleich* zu betrachten, und wir werden später in § 71. auch finden, dass sie innerhalb der Rechenschärfe auch gleich lang sind, wie die geodätische Linie zwischen  $A$  und  $B$ .

## § 67. Einfluss verschiedener Höhen.

Im Bisherigen haben wir immer die Voraussetzung gemacht, dass die in Betracht kommenden Punkte  $A, B$  beide auf der Oberfläche des Umdrehungs-Ellipsoid liegen. Für Triangulierung, Azimutmessung u. dgl. zwischen zwei Punkten ist diese Annahme physisch nicht möglich, weil die Erde nicht durchsichtig ist. In Wirklichkeit befinden sich die Punkte auf Berghöhen, Türmen u. dgl., und es fragt sich, ob dadurch eine Änderung gegen die frühere Annahme stattfindet.

