Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

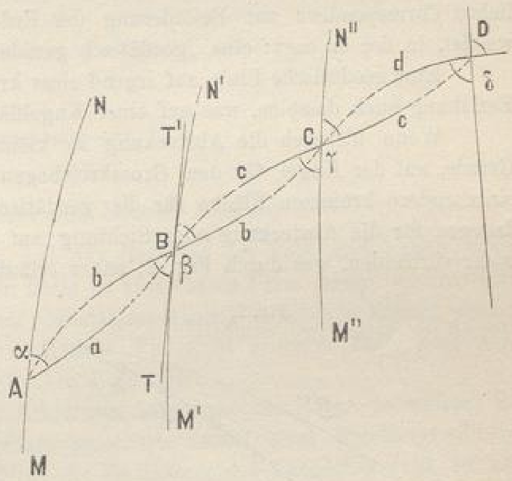
§. 68. Die geodätische Linie

Auf Grund dieses Gesetzes sind Untersuchungen über die azimutale Ablenkung des Lichtstrahles angestellt worden von Andrae, Sonderhof und Helmert (s. Helmert, höhere Geodäsie II. S. 565), in ähnlicher Weise, wie für den Lauf der geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid zwischen den beiden Normalschnitten. Da die Lichtkurve in ihrer Hauptkrümmung viel flacher ist als die geodätische Linie auf der Erde, so wird auch der Querabstand zwischen den Normalschnitten in demselben Verhältnisse kleiner, und ebenso auch die kleinen Winkel beider Lichtkurven kleiner als für die geodätische Linie auf der Erde. Das Krümmungsverhältnis zwischen der Lichtlinie und einer Erdlinie ist der sogenannte Refraktions-Coëfficient, im Mittel etwa $k = 0{,}13$, und hiernach verhält sich die azimutale Ablenkung des Lichtstrahls zu der entsprechenden geodätischen Reduktion wie 0,13 zu 1. Da nun diese geodätische Reduktion selbst sehr gering ist, so ist nach den citierten Untersuchungen von Andrae, Sonderhof und Helmert die Lichtablenkung zu vernachlässigen.

§ 68. Die geodätische Linie.

Nachdem wir in § 65. uns überzeugt haben, dass zwischen zwei Punkten A und B der ellipsoidischen Erdoberfläche im allgemeinen *zwei* verschiedene Normalschnitte bestehen, in welchen bei Theodolit-Beobachtungen von A nach B und von B nach A die Sicht-Linien sich befinden, können wir auch angeben, was für ein Linienzug erhalten wird, wenn man mehrere aufeinanderfolgende Punkte A, B, C (Fig. 1.) durch fortgesetztes Theodolit-Einweisen, wie eine Gerade in der Ebene, absteckt.

Fig. 1.



In Fig. 1. stehe in A ein Theodolit mit lotrechter Axe, mit welchem ein entfernter Punkt B angezielt oder eingewiesen wird, wobei die Sicht $A\,a\,B$ stattfindet. Hierauf begiebt man sich mit dem Theodolit nach B, stellt denselben dort ebenfalls mit lotrechter Axe auf, zielt zurück nach A, was in der Sicht $B\,b\,A$ geschieht, dreht dann um 180° und bekommt die neue Sicht $B\,b\,C$. Hierauf geht man nach C, nimmt wieder die Sicht rückwärts $C\,c\,B$, und um 180° gedreht vorwärts $C\,c\,D$, und so fort.

Die Theorie von § 65. hat uns gezeigt, dass bei diesem Verfahren allerdings im allgemeinen *zwei* Verbindungslinien zwischen je zwei Punkten A und B, B und C, u. s. w. in Betracht kommen, nämlich $A\,a\,B$ von A nach B und $B\,b\,A$ von B nach A u. s. w., doch sind die Abweichungen zwischen a und b, c und d u. s. w. so klein, dass sie selbst bei Dreiecksseiten von 100 000 Meter auf unserer Erdoberfläche noch vernachlässigt werden können.

Wäre unsere Erde stärker abgeplattet, so würden auch diese Abweichungen stärker sein; und im Sinne der Theorie kommt es auf den Grössenbetrag der Abweichungen jetzt nicht an, sondern darauf, dass das mathematische Gesetz des Linienzuges A, B, C, D erkannt werde.

Jedenfalls werden bei der Krümmung, wie sie unser Erdellipsoid hat, die Abweichungen $a\,b$ immer kleiner, wenn die Zielweiten $A\,B$, $B\,C$ u. s. w. fortgesetzt verkürzt werden. Die kleinen Azimutverschiebungen $a\,A\,b$ u. s. w. wachsen nach (7) § 65. S. 364 nur mit dem Quadrate der Zielweiten; und lässt man die Zielweiten $A\,B$, $B\,C$ . . . . selbst unendlich klein (im Sinne der Differential-Rechnung) werden, so werden die Schleifen $A\,a\,B\,b$ u. s. w. sich schliessen, und man bekommt statt des Schleifen-Zuges *eine* stetige Linie $A\,B\,C\,D$, welche *geodätische Linie* heisst, und im allgemeinen eine Kurve doppelter Krümmung ist.

Als Richtungswinkel, bezw. Azimute der geodätischen Linie, welche nach dem Zusammenfallen der Schleifen in Fig. 1. entsteht, sind die Winkel α, β, γ, δ zu betrachten, oder genauer die Grenzwerte, gegen welche diese Winkel α, β, γ, δ bei unbegrenzt abnehmenden Strecken $A\,B$, $B\,C$ u. s. w. konvergieren.

Mit den Begriffen der Feld- und Landmessung in der Ebene kann man die geodätische Linie kurz so erklären:

Man macht auf der ellipsoidischen Erdoberfläche genau dasselbe, was der Landmesser thut, wenn er eine sehr lange Gerade $A\,D$ in der Ebene stückweise absteckt, indem er seinen Theodolit zuerst in A, dann in B, C, D aufstellt, und jedesmal einen Brechungswinkel von 180° absetzt.

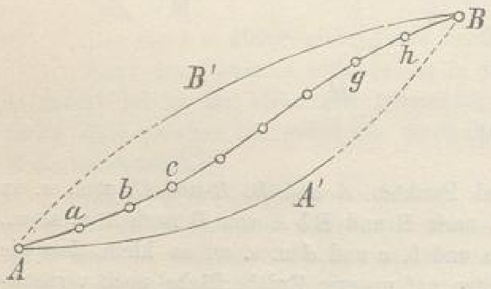
Oder: eine geodätische Linie ist in Bezug auf fortgesetztes Einweisen mit kurzen Zielweiten auf einer krummen Fläche dasselbe, was in der Ebene ein gerade gestrecktes Polygon mit lauter Brechungswinkeln von 180° ist.

Es ist deswegen eine vorzügliche Benennung, welche Soldner in der „monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ 1805 § 7. anwendet, in der er sagt: eine „geodätisch gerade Linie“.

Eine geodätische Linie auf irgend einer krummen Fläche ist in der angegebenen Beziehung auch dasselbe, was auf einer Kugelfläche ein grösster Kreisbogen ist.

Wenn hiernach die Absteckung in kleinen Teilstrecken in der Ebene für die Gerade, auf der Kugel für den Grosskreisbogen und auf dem Ellipsoid oder irgend einer andern krummen Fläche für die geodätische Linie, einander analog sind, so ist dagegen für die Absteckung oder Sichtung auf die Gesamtlänge diese Analogie nicht mehr vorhanden, was durch Fig. 2. näher erläutert werden soll.

Fig. 2.



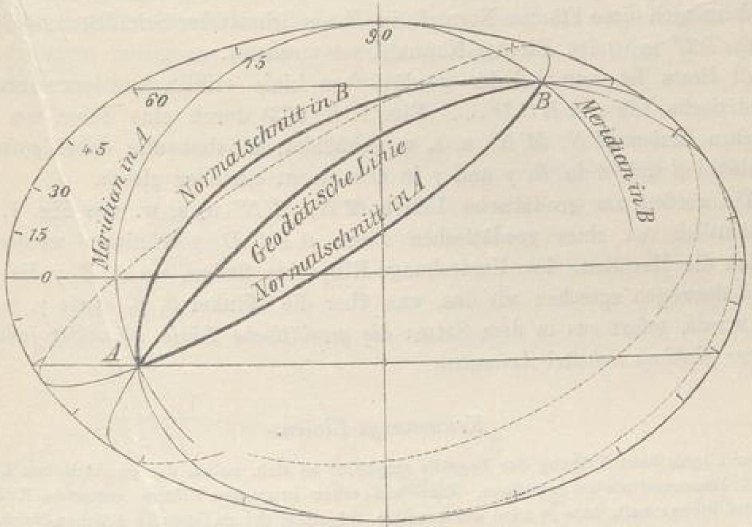
In Fig. 2. sei eine geodätische Linie $A\,a\,b\,c \ldots g\,h\,B$ durch schrittweises Abstecken mit den kleinen Zielweiten $A\,a = a\,b = b\,c$ u. s. w. erhalten, wobei der Theodolit in a, b, c u. s. w. immer Brechungswinkel von 180° zeigt.

Stellt man aber nach Absteckung der Einzelpunkte den Theodolit wieder in A lotrecht auf, und zielt auf *einmal* nach dem Endpunkte B (sofern die Erdkrümmung dieses gestattet), so bekommt man eine ganz andere Sichtlinie als vorher, nämlich nun $A\,A'B$ als vertikalen Schnitt von A nach B, und ebenso in B die Sicht $B\,B'A$ als vertikalen Schnitt von B nach A.

Um dieses noch deutlicher zu zeigen, haben wir in Fig. 3. die beiden Normalschnitte (Vertikalschnitte) zwischen zwei Punkten A und B, nebst der dazwischen verlaufenden geodätischen Linie auf einem Umdrehungs-Ellipsoid mit der Abplattung 1 : 3 dargestellt.

Diese Fig. 3. ist nach einem Modell gemacht, dessen grosse Halbaxe $a = 15^{cm}$ und dessen kleine Halbaxe $B = 10^{cm}$ ist. Es ist also die Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{3}$, die Excentricität $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = 0{,}745$ und $e' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}} = 1{,}118$. Die Normalschnitte und die geodätische Linie sind nach mathematischen Gesetzen konstruiert.

Fig. 3.



Schmiegungs-Ebene und Scheitel-Azimute.

Wenn wir die im vorstehenden, aus den Begriffen des Feld- und Landmessens hergeleitete Erklärung der geodätischen Linie in abstraktere Form fassen, so brauchen wir den Begriff der *Schmiegungs-Ebene* (Osculations-Ebene), d. h. einer Ebene, welche durch zwei aufeinander folgende Elemente einer Kurve, in unserem Falle zwei aufeinander folgende Elemente der geodätischen Linie geht.

Nach unserer Feld-Absteckungs-Erklärung ist dieses die Ebene, in welcher in jedem Punkte der rückwärts und vorwärts gerichtete Strahl eines Brechungswinkels von 180° liegt, und da diese Ebene durch die Vertikalaxe des Theodolits geht, ist sie Normal-Ebene der krummen Fläche, auf welcher die geodätische Linie abgesteckt gedacht wird; und deswegen gilt der Satz:

Die Schmiegungs-Ebene der geodätischen Linie ist überall Normal-Ebene der krummen Fläche, auf welcher die geodätische Linie verläuft.

Wenn in irgend einem Punkte der geodätischen Linie, z. B. B Fig. 1. S. 373, irgend eine Flächen-Tangente TT' gezogen wird, so sind die beiden Scheitelwinkel $bBT = \beta$ und $T'Bb = \beta$, welche die geodätische Linie mit dieser Tangente bildet, einander gleich.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als ob das selbstverständlich und bei allen Kurven der Fall wäre; allerdings sind Scheitelwinkel zwischen zweien Geraden, also auch zwischen zwei Kurven-Tangenten in einem Punkte einander gleich, und es wäre also im Punkte B für jede Kurve $\beta = \beta'$, wenn $A\,B\,C$ Fig. 1. S. 373 als *ein* Element der Kurve gilt; wenn dagegen der Kurventeil $A\,B\,C$ aus zwei oder mehr Elementen bestehend angenommen wird, oder mit anderen Worten, wenn man in dem Punkte B die Krümmung der Kurve $A\,B\,C$ untersuchen will, dann sind die beiden mit β bezeichneten Winkel nur für den Fall gleich, dass die beiden in dem Punkte B zusammentreffenden Elemente der Kurve gemeinsam in *einer* Ebene liegen, welche auch die Flächen-Normale des Punktes B enthält, d. h. Schmiegungs-Ebene in B ist, so dass dann auch diese Flächen-Normale in B als Schnitt der Schmiegungs-Ebene und der durch $T\,T'$ gehenden Flächen-Normalebene erscheint.

All dieses ist nun bei der geodätischen Linie erfüllt, und wenn man daher eine geodätische Linie $A\,B\,C\,D\ldots$ (Fig. 1. S. 373) durch eine Schar von anderen geodätischen Linien $M\,N$, $M'N'$ u. s. w. schneidet, so sind alle dabei auftretenden Schnittwinkel β und β in B, γ und γ in C u. s. w. einander gleich.

Wir werden als geodätische Linien $M\,N$, $M'N'$ u. s. w. von Fig. 1. S. 373, welche sämtlich von einer geodätischen Linie $A\,B\,C\,D$ geschnitten werden, später namentlich die Meridiane des Umdrehungs-Ellipsoids finden, wo α, β, γ die Azimute sind, und deswegen sprechen wir das, was über die Winkel β, β, sowie γ, γ u. s. w. erkannt wurde, sofort aus in dem Satze: *die geodätische Linie schneidet jeden Meridian unter gleichen Scheitel-Azimuten.*

Krümmungs-Linien.

Zur allgemeinen Klärung der Begriffe empfiehlt es sich, neben der geodätischen Linie auch noch die Krümmungslinie zu erwähnen. Eine auf einer krummen Fläche gezogene Krümmungslinie hat die Eigenschaft, dass je zwei aufeinander folgende, ihr zugehörige Flächen-Normalen sich schneiden, was bei der geodätischen Linie nicht der Fall ist, wie z. B. aus den zwei Punkten K_a und K_b Fig. 1. § 65. S. 361 zu ersehen ist.

Eine Krümmungslinie folgt stets der grössten oder der kleinsten Krümmung, deren Richtungen nach dem Eulerschen Satze (§ 33. S. 199) zu einander rechtwinklig sind; und daher bilden die sämtlichen Krümmungslinien einer Fläche zwei Scharen von Kurven, die sich überall gegenseitig rechtwinklig schneiden.

Ein Flächenpunkt, in welchem die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser (und damit auch alle Normalschnitts-Krümmungs-Halbmesser) gleich sind, heisst „Nabelpunkt" der Fläche. Z. B. sind die beiden Pole des Umdrehungs-Ellipsoids Nabelpunkte in diesem Sinne; die Meridiane sind Krümmungslinien der einen Schar, und die Parallelkreise sind Krümmungslinien der zweiten Schar. Das strahlenförmige Ausgehen der Meridiane als erster Schar vom Pol als Nabelpunkt ist jedoch nur besonderer Fall und findet z. B. bei den vier Nabelpunkten des dreiaxigen Ellipsoids nicht mehr statt.

Wenn eine Krümmungslinie zugleich geodätische Linie sein soll, so muss sie ganz in einer Ebene liegen, weil jede Flächen-Normale sowohl von den beiden benachbarten Flächen-Normalen geschnitten werden, als auch in der Ebene zweier benachbarten Kurven-Elemente liegen muss, was bloss bei einer ebenen Kurve möglich ist; dagegen umgekehrt eine Krümmungslinie, die in einer Ebene liegt, ist deswegen nicht notwendig geodätische Linie.

Auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (sowie auf jeder anderen Umdrehungsfläche) ist jeder Meridian geodätische Linie *und* Krümmungslinie; ein Parallelkreis ist Krümmungslinie aber *nicht* geodätische Linie.

§ 69. Differential-Gleichungen der geodätischen Linie.

Nachdem wir am Schluss des vorigen § 68. den Satz von den gleichen Scheitel-Azimuten der geodätischen Linie gefunden haben, können wir die Differential-Gleich-