



Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 69. Differential-Gleichungen der geodätischen Linie

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

also auch zwischen zwei Kurven-Tangenten in einem Punkte einander gleich, und es wäre also im Punkte B für jede Kurve $\beta = \beta'$, wenn $A B C$ Fig. 1. S. 373 als ein Element der Kurve gilt; wenn dagegen der Kurventeil $A B C$ aus zwei oder mehr Elementen bestehend angenommen wird, oder mit anderen Worten, wenn man in dem Punkte B die Krümmung der Kurve $A B C$ untersuchen will, dann sind die beiden mit β bezeichneten Winkel nur für den Fall gleich, dass die beiden in dem Punkte B zusammentreffenden Elemente der Kurve gemeinsam in einer Ebene liegen, welche auch die Flächen-Normale des Punktes B enthält, d. h. Schmiegs-Ebene in B ist, so dass dann auch diese Flächen-Normale in B als Schnitt der Schmiegs-Ebene und der durch $T T'$ gehenden Flächen-Normalebene erscheint.

All dieses ist nun bei der geodätischen Linie erfüllt, und wenn man daher eine geodätische Linie $A B C D \dots$ (Fig. 1. S. 373) durch eine Schar von anderen geodätischen Linien $M N, M' N'$ u. s. w. schneidet, so sind alle dabei auftretenden Schnittwinkel β und β' in B , γ und γ' in C u. s. w. einander gleich.

Wir werden als geodätische Linien $M N, M' N'$ u. s. w. von Fig. 1. S. 373, welche sämtlich von einer geodätischen Linie $A B C D$ geschnitten werden, später namentlich die Meridiane des Umdrehungs-Ellipsoids finden, wo α, β, γ die Azimute sind, und deswegen sprechen wir das, was über die Winkel β, β' , sowie γ, γ' u. s. w. erkannt wurde, sofort aus in dem Satze: *die geodätische Linie schneidet jeden Meridian unter gleichen Scheitel-Azimuten.*

Krümmungs-Linien.

Zur allgemeinen Klärung der Begriffe empfiehlt es sich, neben der geodätischen Linie auch noch die Krümmungslinie zu erwähnen. Eine auf einer krummen Fläche gezogene Krümmungslinie hat die Eigenschaft, dass je zwei aufeinander folgende, ihr zugehörige Flächen-Normalen sich schneiden, was bei der geodätischen Linie nicht der Fall ist, wie z. B. aus den zwei Punkten K_a und K_b Fig. 1. § 65. S. 361 zu ersehen ist.

Eine Krümmungslinie folgt stets der grössten oder der kleinsten Krümmung, deren Richtungen nach dem Eulerschen Satze (§ 33. S. 199) zu einander rechtwinklig sind; und daher bilden die sämtlichen Krümmungslinien einer Fläche zwei Scharen von Kurven, die sich überall gegenseitig rechtwinklig schneiden.

Ein Flächenpunkt, in welchem die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser (und damit auch alle Normalschnitts-Krümmungs-Halbmesser) gleich sind, heißt „Nabelpunkt“ der Fläche. Z. B. sind die beiden Pole des Umdrehungs-Ellipsoids Nabelpunkte in diesem Sinne; die Meridiane sind Krümmungslinien der einen Schar, und die Parallelkreise sind Krümmungslinien der zweiten Schar. Das strahlenförmige Ausgehen der Meridiane als erster Schar vom Pol als Nabelpunkt ist jedoch nur besonderer Fall und findet z. B. bei den vier Nabelpunkten des dreiaxigen Ellipsoids nicht mehr statt.

Wenn eine Krümmungslinie zugleich geodätische Linie sein soll, so muss sie ganz in einer Ebene liegen, weil jede Flächen-Normale sowohl von den beiden benachbarten Flächen-Normalen geschnitten werden, als auch in der Ebene zweier benachbarten Kurven-Elemente liegen muss, was bloss bei einer ebenen Kurve möglich ist; dagegen umgekehrt eine Krümmungslinie, die in einer Ebene liegt, ist deswegen nicht notwendig geodätische Linie.

Auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (sowie auf jeder anderen Umdrehungsfläche) ist jeder Meridian geodätische Linie und Krümmungslinie; ein Parallelkreis ist Krümmungslinie aber nicht geodätische Linie.

§ 69. Differential-Gleichungen der geodätischen Linie.

Nachdem wir am Schluss des vorigen § 68. den Satz von den gleichen Scheitel-Azimuten der geodätischen Linie gefunden haben, können wir die Differential-Gleich-

ungen dieser Linie auf irgend einer Umdrehungsfläche aufstellen, in ähnlicher Weise wie wir früher bei Fig. 1. § 61. S. 347 die Differential-Gleichungen des grössten Kreises auf der Kugel durch geometrische Betrachtungen nachgewiesen haben.

Obgleich die nachfolgenden Betrachtungen auf jede beliebige Umdrehungsfläche bezogen werden können, legen wir doch sofort in Fig. 1. unser Umdrehungs-Ellipsoid zu Grunde, weil wir für andere Flächen keine Anwendung haben.

Im Anschluss an Fig. 1. und Fig. 2. stellen wir eine geometrische Differential-Betrachtung an, welche ganz analog dem früheren Falle auf der Kugel (Fig. 1. und Fig. 2. § 61. S. 347) ist. Wir betrachten dabei Fig. 2. als polyedrisches Analogon zu der wirklichen krummen Fläche, und haben dabei den Grenzfall für unbegrenzt abnehmendes ds im Auge.

Fig. 1.

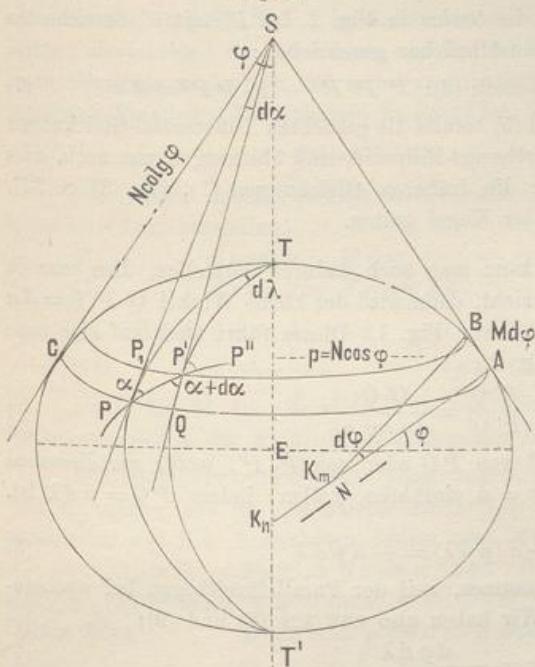
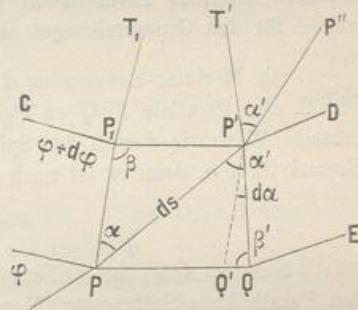


Fig. 2.
Besonderer Teil von Fig. 1.



Eine geodätische Linie $PP'P'$ schneidet schief über zwei Meridiane und zwei Parallelkreise des Umdrehungs-Ellipsoids hin, wodurch ein Trapez $PP_1P'Q$ für uns von Wichtigkeit wird, dessen Diagonale PP' ein Stück ds der geodätischen Linie ist.

Indem wir die Breiten φ und $\varphi + d\varphi$ und den Längenunterschied $d\lambda$ sowie den Meridian-Krümmungs-Halbmesser M und den Quer-Krümmungs-Halbmesser N nach alter Bezeichnung annehmen, haben wir (nach Andeutung von K_m und K_n in Fig. 1. und Fig. 2.) die Seiten des Trapezes:

$$A, B \text{ oder } P P_1 = M d \infty \quad (1)$$

$$PQ \text{ oder } P; P' \equiv N \cos \varphi d\lambda \quad (2)$$

Wenn nun das Azimut der geodätischen Linie bei P den Wert α hat, und das Element der geodätischen Linie selbst $-ds$ gesetzt wird, so erhält man in erster

Näherung, da der Winkel β bei P_1 mit unbegrenzt abnehmendem ds gegen 90° konvergiert:

$$\text{aus (1): } ds \cos \alpha = M d\varphi \quad (3)$$

$$\text{aus (2): } ds \sin \alpha = N \cos \varphi d\lambda = p d\lambda \quad (4)$$

Um auch für $d\alpha$ eine Differential-Formel zu erhalten, betrachten wir das langgestreckte schmale Dreieck $PP'S$, welches oben bei S den Winkel $d\alpha$ enthält; daselbe giebt genau in derselben Weise, wie früher bei der Kugel in (3 a) § 61. S. 348 gezeigt wurde, die Gleichung:

$$d\alpha = d\lambda \sin \varphi \quad (5)$$

Dabei ist aber zu beachten, dass dieses $d\alpha$ zunächst nur gilt für die Differenz:

$$Q P' P - P_1 P P' = d\alpha \quad (6)$$

allein wegen des Satzes von den gleichen Scheitel-Azimuten der geodätischen Linie, den wir eingangs citiert haben, sind die *beiden* in Fig. 2. bei P' mit α' bezeichneten Azimute einander gleich, oder noch ausführlicher geschrieben:

$$T' P' P'' = Q P' P, \text{ also nach (6): } T' P' P'' - P_1 P P' = d\alpha \quad (7)$$

Nun haben wir in (3), (4) und (5) bereits die gesuchten Differential-Gleichungen der geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid, und überzeugen uns auch, dass dieselben ähnliche Form haben wie die früheren Gleichungen (1), (2), (3) S. 347, welche für den Grosskreisbogen auf der Kugel gelten.

Die Meridian-Konvergenz $d\alpha$ kann man auch dadurch darstellen, dass man in Fig. 2. eine Parallel $P'Q'$ zu P_1P zieht, dann wird der kleine Winkel $Q'P'Q = d\alpha$ derselbe Wert wie $d\alpha$ an der Spitze S von Fig. 1. Dieses führt auch auf eine neue Formel für $d\alpha$, denn es ist nach Fig. 2.:

$$d\alpha = \frac{Q'Q}{P'Q'} = \frac{Q'Q}{ds \cos \alpha} \quad (8)$$

Nun ist $Q'Q$ das Differential von PQ oder von P_1P' , wofür wir diesesmal den Parallelkreis-Halbmesser $N \cos \varphi = p$ einführen wollen, indem $PQ = pd\lambda$ ist. Damit wird:

$$Q'Q = -d(pd\lambda) = -dpd\lambda \quad (9)$$

Wir haben dieses negativ genommen, weil der Parallelkreisbogen bei wachsender Breite ($d\varphi$ positiv) abnimmt. Wir haben also nun aus (8) und (9):

$$d\alpha = -\frac{dpd\lambda}{ds \cos \alpha}$$

Wenn man hiezu wieder (4) nimmt, und $d\lambda$ eliminiert, so hat man:

$$p \cos \alpha d\alpha = -dp \sin \alpha \quad (10)$$

Dieses ist das Differential von:

$$p \sin \alpha = k \text{ (konstant)} \quad (11)$$

und damit haben wir als erste Integration der Differential-Gleichungen der geodätischen Linie einen wichtigen Satz (11), welcher in Worten lautet:

Das Produkt aus dem Parallelkreis-Halbmesser p in den Sinus des Azimuts α ist für den ganzen Lauf der geodätischen Linie konstant.

Dieser Satz, welchem auf der Kugel der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie entspricht, giebt sofort Aufschluss über den Gesamtverlauf einer geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid.

Die beiden Faktoren p und $\sin \alpha$, deren Produkt nach (11) konstant = k bleiben muss, schwanken selbst zwischen leicht angebbaren Grenzen. Das Azimut α kann im allgemeinen nicht = Null werden (was dem besonderen Fall des Meridians entspricht), sondern hat seinen kleinsten Wert dann, wenn p seinen grössten Wert hat, d. h. im Äquator, wo $p = a$ ist; also:

$$\sin \alpha_{\min} = \frac{k}{a} \quad (12)$$

Der grösste Wert von α , d. h. 90° , entspricht dem kleinsten Wert von p , d. h. mit $\sin \alpha = 1$ hat man: $p_{\min} = k$ (13)

Die Konstante k der Formel (11) ist also der Halbmesser des nördlichsten oder südlichsten Parallelkreises, den die geodätische Linie erreichen kann; und dadurch ist auch eine gewisse äusserste geographische Breite bestimmt, über welche eine geodätische Linie nicht hinaus kommen kann.

In Fig. 3. § 69. S. 375 ist diese äusserste Breite = 60° . Die geodätische Linie berührt abwechselnd den nördlichen und den südlichen äussersten Parallelkreis, und da sie im allgemeinen nicht in sich selbst zurückkehrt, umläuft sie zwischen den genannten äussersten Parallelen das Sphäroid in unendlich vielen spiralförmigen Windungen.

Übersicht der Haupt-Formeln.

Wir wollen unsere gefundenen Formeln, die zu weiterem gebraucht werden, nochmals zusammenstellen:

$$(3) \quad d s \cos \alpha = M d \varphi \quad (\varphi)$$

$$(4) \quad d s \sin \alpha = N \cos \varphi d \lambda \quad (\lambda)$$

$$(5) \text{ und } (4) \quad d \alpha = d \lambda \sin \varphi \quad \text{oder} \quad d \alpha = \frac{d s}{N} \sin \alpha \tan \varphi \quad (\alpha)$$

$$(11) \quad p \sin \alpha = k \quad (p = N \cos \varphi) \quad (\psi)$$

Dabei ist M der Meridian-Krümmungs-Halbmesser, N der Quer-Krümmungs-Halbmesser und p der Parallelkreis-Halbmesser für die Breite φ .

Die letzte der vorstehenden Gleichungen, welche wir mit (ψ) bezeichnet haben, weil sie später auf die „reduzierte Breite“ ψ angewendet wird, kann man auch unmittelbar aus Fig. 2. herleiten, indem man in erster Näherung setzt:

$$P_1 P' = d s \sin \alpha \quad \text{und} \quad P Q = d s \sin \alpha' \quad (14)$$

$$\text{also} \quad P_1 P' \sin \alpha' = P Q \sin \alpha, \text{ wobei } P_1 P' = p' d \lambda \text{ und } P Q = p d \lambda \quad (15)$$

$$\text{Daraus folgt} \quad p' \sin \alpha' = p \sin \alpha = \text{Konstant.} \quad (16)$$

§ 70. Die geodätische Linie als kürzeste Linie.

Im Anschluss an Fig. 1. nehmen wir zuerst folgende Aufgabe: Man habe ein Prisma mit den drei Kanten $A A'$, $B' B$, $P Q$, die wir (zur Vereinfachung der Anschauung) so gelegt denken, dass $A A'$ und $B' B$ in einer horizontalen Ebene und $P Q$ im Abstand h darüber sich befindet. Es soll auf der oberen Kante ein Punkt S so bestimmt werden, dass die Summe der *schiefen* Verbindungen $A S + S B = (s) + (s')$ nach zwei festen Punkten A und B möglichst klein werde.

Fig. 1.
Die eingeklammerten Masse (s) , (s') , (φ) , (ψ) beziehen sich auf die *schiefen* Ebenen.

