Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 70. Die geodätische Linie als kürzeste Linie

Die beiden Faktoren p und $\sin\alpha$, deren Produkt nach (11) konstant $= k$ bleiben muss, schwanken selbst zwischen leicht angebbaren Grenzen. Das Azimut α kann im allgemeinen nicht $=$ Null werden (was dem besonderen Fall des Meridians entspricht), sondern hat seinen kleinsten Wert dann, wenn p seinen grössten Wert hat, d. h. im Äquator, wo $p = a$ ist; also:

$$\sin\alpha_{min} = \frac{k}{a} \tag{12}$$

Der grösste Wert von α, d. h. 90°, entspricht dem kleinsten Wert von p, d. h. mit $\sin\alpha = 1$ hat man:

$$p_{min} = k \tag{13}$$

Die Konstante k der Formel (11) ist also der Halbmesser des nördlichsten oder südlichsten Parallelkreises, den die geodätische Linie erreichen kann; und dadurch ist auch eine gewisse äusserste geographische Breite bestimmt, über welche eine geodätische Linie nicht hinaus kommen kann.

In Fig. 3. § 69. S. 375 ist diese äusserste Breite $= 60°$. Die geodätische Linie berührt abwechselnd den nördlichen und den südlichen äussersten Parallelkreis, und da sie im allgemeinen nicht in sich selbst zurückkehrt, umläuft sie zwischen den genannten äussersten Parallelen das Sphäroid in unendlich vielen spiralförmigen Windungen.

Übersicht der Haupt-Formeln.

Wir wollen unsere gefundenen Formeln, die zu weiterem gebraucht werden, nochmals zusammenstellen:

(3) $$d s \cos\alpha = M\, d\varphi \tag{φ}$$

(4) $$d s \sin\alpha = N \cos\varphi\, d\lambda \tag{λ}$$

(5) und (4) $$d\alpha = d\lambda \sin\varphi \quad \text{oder} \quad d\alpha = \frac{d s}{N} \sin\alpha \tan\varphi \tag{α}$$

(11) $$p \sin\alpha = k \qquad (p = N\cos\varphi) \tag{ψ}$$

Dabei ist M der Meridian-Krümmungs-Halbmesser, N der Quer-Krümmungs-Halbmesser und p der Parallelkreis-Halbmesser für die Breite φ.

Die letzte der vorstehenden Gleichungen, welche wir mit (ψ) bezeichnet haben, weil sie später auf die „reduzierte Breite“ ψ angewendet wird, kann man auch unmittelbar aus Fig. 2. herleiten, indem man in erster Näherung setzt:

$$P_1 P' = d s \sin\alpha \quad \text{und} \quad P Q = d s \sin\alpha' \tag{14}$$

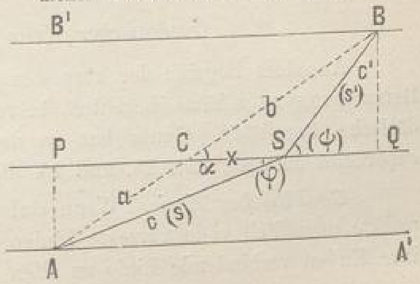
also $$P_1 P' \sin\alpha' = P Q \sin\alpha, \text{ wobei } P_1 P' = p'\, d\lambda \text{ und } P Q = p\, d\lambda \tag{15}$$

Daraus folgt $$p' \sin\alpha' = p \sin\alpha = \text{Konstant}. \tag{16}$$

§ 70. Die geodätische Linie als kürzeste Linie.

Im Anschluss an Fig. 1. nehmen wir zuerst folgende Aufgabe: Man habe ein Prisma mit den drei Kanten $A A'$, $B' B$, $P Q$, die wir (zur Vereinfachung der Anschauung) so gelegt denken, dass $A A'$ und $B' B$ in einer horizontalen Ebene und $P Q$ im Abstand h darüber sich befindet. Es soll auf der oberen Kante ein Punkt S so bestimmt werden, dass die Summe der *schiefen* Verbindungen $A S + S B = (s) + (s')$ nach zwei festen Punkten A und B möglichst klein werde.

Fig. 1.
Die eingeklammerten Masse (s), (s'), (φ), (ψ) beziehen sich auf die *schiefen* Ebenen.



Wenn die in Fig. 1. eingeschriebenen Masse a, b, c, c', x nebst dem Winkel α für die Grundriss-Ebene gelten, so hat man:

$$c^2 = a^2 + x^2 + 2\,a\,x\cos\alpha \quad , \quad c'^2 = b^2 + x^2 - 2\,b\,x\cos\alpha \tag{1}$$

Wenn weiter (s) und (s') die *schiefen* Entfernungen AS und SB bedeuten, und h die Höhe von S über A und B, so ist:

$$(s)^2 = c^2 + h^2 \qquad (s')^2 = c'^2 + h^2 \tag{2}$$

Nun soll $(s) + (s')$ ein Minimum werden, d. h.:

$$\sqrt{a^2 + x^2 + 2\,a\,x\cos\alpha + h^2} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2\,b\,x\cos\alpha + h^2} = \text{Minimum} \tag{3}$$

Wenn man dieses (3) nach der unabhängigen Veränderlichen x differentiiert, so findet man:

$$\frac{x + a\cos\alpha}{(s)} + \frac{x - b\cos\alpha}{(s')} = 0 \tag{4}$$

Es ist aber nach Fig. 1. im Grundriss gemessen:

$$x + a\cos\alpha = PS \quad , \quad b\cos\alpha - x = QS$$

Damit wird (4):

$$\frac{PS}{(s)} = \frac{QS}{(s')} \quad \text{oder} \quad \cos(\varphi) = \cos(\psi)$$

$$\text{also: } (\varphi) = (\psi) \tag{5}$$

Diese Gleichung (5) sagt: der kürzeste Weg auf zweien sich schneidenden Ebenen, über die Kante PQ hinweg, liegt so, dass auf der Scheitel-Kante PQ die beiden Winkel (φ) und (ψ) einander gleich sind.

Wenn wir diese einfache Betrachtung dazu anwenden, um die Differential-Eigenschaft der kürzesten Linie auf irgend einer krummen Fläche, insbesondere auf dem Umdrehungs-Ellipsoid, zu bestimmen, so können wir an Stelle der Kanten AA', BB' u. s. w. die aufeinander folgenden Meridiane treten lassen, und wir wissen nun, dass eine Kurve alle diese Meridiane auf kürzestem Wege überschreitet, wenn die dabei vorkommenden Scheitel-Azimute gleich sind, d. h. die kürzeste Linie hat, in Hinsicht auf die Azimute, dieselbe Eigenschaft wie die geodätische Linie, wie wir am Schluss von § 68. S. 376 gesehen haben.

Wir schliessen hieraus, dass die geodätische Linie und die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten identisch sind.

Dabei und bei allen ähnlichen Betrachtungen nehmen wir stillschweigend an, dass zwischen zwei Punkten nur *eine* geodätische Linie und nur *eine* kürzeste Linie bestehe, wir schliessen also Fälle, welche z. B. einem Centriwinkel über 180° auf der Kugel entsprechen, und ähnliche aus.

Geodätischer Kreis und geodätische Parallele.

Aus dem Begriffe der kürzesten Linie lassen sich durch einfache geometrische Betrachtung zwei Sätze herleiten, betreffend den „geodätischen" Kreis und die „geodätische Parallele". Gauss hat in der Abhandlung „Disquisitiones generales circa superficies curvas", Art. 15. und 16. dieses so dargestellt:

Geodätischer Kreis. Wenn auf einer krummen Fläche von einem Anfangspunkte unendlich viele kürzeste Linien, alle von gleicher Länge ausgehen, so ist die ihre Enden verbindende Linie zu allen einzelnen normal.

Fig. 2.

Es seien in Fig. 2. AB und AB' zwei gleich lange kürzeste Linien, welche den unendlich kleinen Winkel bei A zwischen sich fassen; und wir wollen zunächst annehmen, die beiden Winkel bei B und B' seien *nicht* beide $= 90°$, sondern weichen um eine endliche Grösse von 90° ab, so dass nach dem Gesetz der Stetigkeit der eine grösser, der andere kleiner als 90° wäre, z. B. $B = 90° - \omega$. Dann nehmen wir auf der Linie BA einen Punkt C so an, dass $BC = BB' \operatorname{cosec} \omega$ wird; und insofern das unendlich kleine Dreieck $BB'C$ als eben angesehen werden kann, folgt hieraus $CB' = BC \cos \omega$ und ferner:

$$AC + CB' = AC + BC \cos \omega = AB - BC(1 - \cos \omega).$$

Es ist aber von vornherein angenommen, dass $AB = AB'$ sei, also:

$$AC + CB' = AB' - BC(1 - \cos \omega).$$

Hiernach würde man von A nach B' einen *kürzeren* Weg über C haben als unmittelbar AB', was der Annahme, dass AB' selbst eine Kürzeste sei, widerspricht. Es kann also ω keine endliche Grösse sein, sondern die Winkel bei B und bei B' sind beide $= 90°$.

Geodätische Parallele. Wenn auf einer krummen Fläche eine beliebige Linie gezogen wird, von deren einzelnen Punkten rechtwinklig zu der Linie und nach derselben Seite hin unendlich viele kürzeste Linien von gleicher Länge ausgehen, so schneidet die Kurve, welche die anderen Endpunkte derselben verbindet, sie alle rechtwinklig.

Man kann dieses ähnlich beweisen wie bei Fig. 2., indem man wieder einen kleinen Winkel ω einführt und zwei unendlich nahe benachbarte geodätische Linien wie zwei Gerade in der Ebene behandelt.

Dieser zweite Satz über die geodätische Parallele ist allgemeiner als der erste Satz vom geodätischen Kreis, welcher in dem zweiten Satze mit enthalten ist, wenn man nur als gegebene Linie einen unendlich kleinen um A beschriebenen Kreis annimmt.

Ein naheliegendes Beispiel für geodätische Kreise und für Parallelen bietet das System der Meridiane und der Parallelkreise auf der Kugel oder auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (und auf anderen Umdrehungs-Flächen). Die Parallelkreise sind geodätische Kreise in Bezug auf den Pol als Zentralpunkt der Meridiane und geodätische Parallelen in Bezug auf irgend einen Parallelkreis.

Ebenso wie diese Parallelkreise selbst *nicht* geodätische Linien sind, sind auch die geodätischen Kreise und geodätischen Parallelen im allgemeinen selbst nicht geodätische Linien.

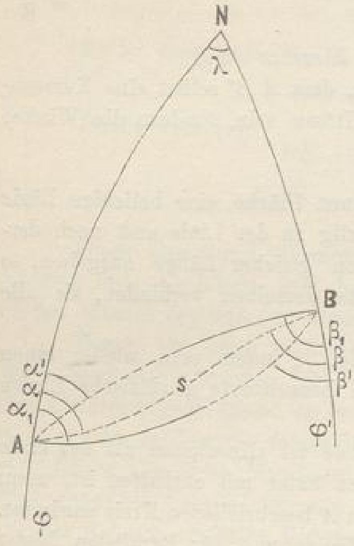
Kürzeste Linie auf einer abwickelbaren Fläche.

Bei der geometrischen Betrachtung von Fig. 1. S. 379 sind die Kanten BB' und AA' selbst unwesentlich, es handelt sich nur um zwei *Punkte* A und B, welche über die dritte Kante PQ hinweg verbunden werden sollen. Durch A und B selbst können beliebige andere Gerade gehen. Man kann deswegen aus Fig. 1. auch schliessen, dass eine kürzeste Linie auf einer abwickelbaren Fläche nach Abwicklung in die Ebene eine Gerade sein muss (Gleichheit der Winkel (φ) und (ψ)). Die Kanten AA', BB' und PQ, welche in unserer Fig. 1. parallel angenommen wurden, können auch auf einer abwickelbaren Fläche parallel sein (Cylinder), im allgemeinen aber müssen, wenn die Fläche abwickelbar sein soll, je zwei aufeinander folgende solcher Geraden sich schneiden.

§ 71. Vergleichung der geodätischen Linie mit den Normal-Schnitten.

Die geodätische Linie erscheint auf kurze Erstreckung im Sinne des Feldmessens in allen ihren Teilen wie eine Gerade; würde man dieselbe in kurzen Strecken landmesserisch als polygonalen Zug aufnehmen, so würde man lauter Brechungswinkel von 180° finden, wie bei einer Geraden in der Ebene.

Fig. 1.



In Fig. 1. und Fig. 2. betrachten wir zwei Punkte A und B unter den Breiten φ und φ' mit dem Längenunterschied λ.

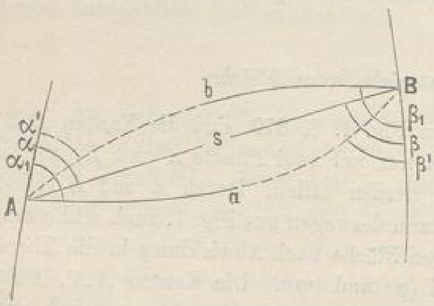
$A\,a\,B$ ist der Normalschnitt von A nach B und $B\,b\,A$ ist der Normalschnitt von B nach A, und dazwischen verläuft die geodätische Linie $A\,s\,B$, was im voraus gesagt sein soll.

Zur Veranschaulichung der Krümmungsverhältnisse denken wir uns in A einen Feldmesser mit einem richtig aufgestellten Theodolit als Beobachter, welcher die Azimute α', α, α_1 der drei Kurven von dem als Gerade erscheinenden Meridian $A\,N$ messen oder einstellen kann.

Der Normalschnitt $A\,a\,B$ mit dem Azimut α_1 erscheint diesem in A mit einem Theodolit ausgerüsteten Feldmesser als eine Gerade, denn er hat die ganze Linie $A\,a\,B$ beim Auf- und Niederkippen seines Fernrohrs in *einer* Sicht am Fadenkreuz, wie es das Wesen des Normalschnittes von A nach B verlangt.

Die geodätische Linie $A\,s\,B$ mit dem Azimute α macht dem Feldmesser, der in A mit seinem Theodolit steht, in ihren ersten Teilen ebenfalls den Eindruck der Geraden, wie in Fig. 2. § 68. S. 374 angedeutet ist, dass streckenweise $A\,a\,b$, dann $a\,b\,c$ u. s. w. ohne Brechung erscheinen. Aber die Gegenschnittlinie $A\,b\,B$ mit dem Azimute α' macht dem Feldmesser in A den Eindruck einer *Kurve*, denn nur von B aus erscheint $A\,b\,B$ als Gerade ebenso wie umgekehrt $A\,a\,B$ zwar in A als Gerade erscheint, aber in B als Kurve.

Fig. 1.



Wir wollen darauf ausgehen, den Krümmungs-Halbmesser R' zu bestimmen, unter welchem die Kurve $B\,b\,A$ dem Beobachter in A erscheint, oder den Krümmungs-Halbmesser, unter welchem die Kurve $A\,a\,B$ einem Feldmesser in B erscheint; beide werden nahezu gleich sein.