



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 71. Vergleichung der geodätischen Linie mit den Normal-Schnitten

---

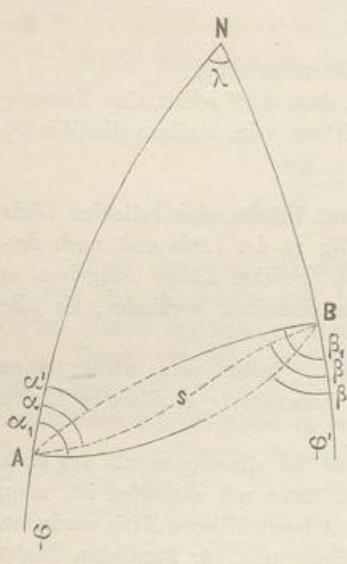
[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](#)

einer abwickelbaren Fläche parallel sein (Cylinder), im allgemeinen aber müssen, wenn die Fläche abwickelbar sein soll, je zwei aufeinander folgende solcher Geraden sich schneiden.

### § 71. Vergleichung der geodätischen Linie mit den Normal-Schnitten.

Die geodätische Linie erscheint auf kurze Erstreckung im Sinne des Feldmessens in allen ihren Teilen wie eine Gerade; würde man dieselbe in kurzen Strecken landmesserisch als polygonalen Zug aufnehmen, so würde man lauter Brechungswinkel von  $180^\circ$  finden, wie bei einer Geraden in der Ebene.

Fig. 1.



In Fig. 1. und Fig. 2. betrachten wir zwei Punkte  $A$  und  $B$  unter den Breiten  $\varphi$  und  $\varphi'$  mit dem Längenunterschied  $\lambda$ .

$A a B$  ist der Normalschnitt von  $A$  nach  $B$  und  $B b A$  ist der Normalschnitt von  $B$  nach  $A$ , und dazwischen verläuft die geodätische Linie  $A s B$ , was im voraus gesagt sein soll.

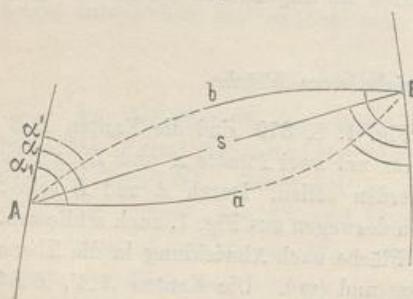
Zur Veranschaulichung der Krümmungsverhältnisse denken wir uns in  $A$  einen Feldmesser mit einem richtig aufgestellten Theodolit als Beobachter, welcher die Azimute  $\alpha'$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  der drei Kurven von dem als Gerade erscheinenden Meridian  $AN$  messen oder einstellen kann.

Der Normalschnitt  $A a B$  mit dem Azimut  $\alpha_1$  erscheint diesem in  $A$  mit einem Theodolit ausgerüsteten Feldmesser als eine Gerade, denn er hat die ganze Linie  $A a B$  beim Auf- und Niederkippen seines Fernrohrs in einer Sicht am Fadenkreuz, wie es das Wesen des Normalschnittes von  $A$  nach  $B$  verlangt.

Die geodätische Linie  $A s B$  mit dem Azimut  $\alpha$  macht dem Feldmesser, der in  $A$  mit seinem Theodolit steht, in ihren ersten Teilen ebenfalls den Eindruck der Geraden, wie in Fig. 2. § 68. S. 374 angedeutet ist, dass streckenweise  $A a b$ , dann  $a b c$  u. w. ohne Brechung erscheinen. Aber die Gegenschnittlinie  $A b B$  mit dem Azimut  $\alpha'$  macht dem Feldmesser in  $A$  den Eindruck einer Kurve, denn nur von  $B$  aus erscheint  $A b B$  als Gerade ebenso wie umgekehrt  $A a B$  zwar in  $A$  als Gerade erscheint, aber in  $B$  als Kurve.

Wir wollen darauf ausgehen, den Krümmungs-Halbmesser  $R'$  zu bestimmen, unter welchem die Kurve  $B b A$  dem Beobachter in  $A$  erscheint, oder den Krümmungs-Halbmesser, unter welchem die Kurve  $A a B$  einem Feldmesser in  $B$  erscheint; beide werden nahezu gleich sein.

Fig. 1.



Dazu haben wir die weiteren Fig. 3. und 4. gezeichnet, von denen Fig. 4. ein Lageplan wie Fig. 2. und Fig. 3. der zugehörige Vertikalschnitt rechtwinklig zu  $Ab$  ist.

Wenn  $R$  der Krümmungs-Halbmesser des ebenen Gegen-Schnittes  $AbB$  in  $A$  ist, d. h.  $R$  in erster Näherung auch gleich dem Krümmungs-Halbmesser  $R$  nach dem Eulerschen Satze (1) § 32. S. 199, oder auch nur in erster Näherung gleich dem mittleren Erdkrümmungs-Halbmesser, was zunächst auch schon genügt, und wenn  $n$  der kleine Neigungswinkel der Schnittebene  $AbA$  gegen die Flächen-Normale  $AK_a$  im Punkte  $A$  ist, so wird die Kurve  $Ab$  in dem Horizont von  $A$  betrachtet (Fig. 4.) einen sehr viel grösseren Krümmungs-Halbmesser  $R'$  geben, welcher ist:

$$R' = \frac{R}{\sin n} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R'} = \frac{\sin n}{R} \quad (1)$$

Man nennt diese Beziehung in der analytischen Geometrie den „Satz von Meunier“; man kann ihn fast unmittelbar einsehen, wenn man nur bedenkt, dass die Ordinaten  $y$  der Kurve  $AC$  von Fig. 3. sich im Verhältnis  $\sin n : 1$  verkürzt in Fig. 4. wieder finden, dass also auch  $\frac{dy}{dx}$  und  $\frac{d^2y}{dx^2}$  in der Nähe des Punktes  $A$  ebenso verkürzt werden und die Kurve  $Ab$  in Fig. 4. entsprechend flacher wird.

Innerhalb der nur einzuhaltenden ersten Näherung kann man (1) auch so schreiben:

$$\frac{1}{R'} = \frac{n}{R} \quad (2)$$

Wir müssen nun darauf ausgehen, die oben eingeführte Neigung  $n$  zwischen der Schnittebene  $AbB$  und der Flächennormalen  $AK_a$  zu bestimmen, und wir betrachten dazu die früheren Fig. 1. § 65. S. 361 und Fig. 1. § 66. S. 366.

Dort wird sich der fragliche Neigungswinkel  $n$  finden, und man wird auch

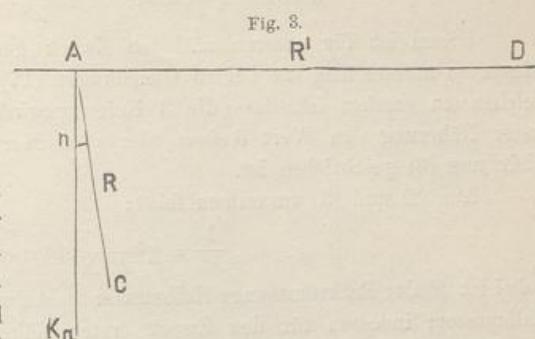


Fig. 3.

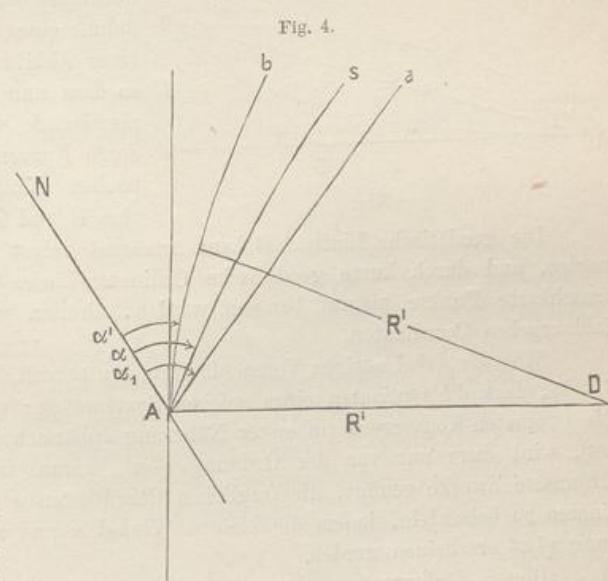


Fig. 4.

sehen, dass er in erster Näherung auch gleich dem Neigungswinkel  $\nu$  der beiden Schnittebenen ist, d. h. nach (14) § 65. S. 365 nehmen wir:

$$n = \nu = \eta^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \eta^2 \frac{s}{N} \sin \alpha \cos \alpha \quad (3)$$

Dieses ist für unseren nächsten Zweck genügend. Wollte man genauer verfahren, so müsste man die beiden Gleichungen (17) § 66. S. 370 zu Rate ziehen, aus welchen zu ersehen ist, dass die 3 Neigungswinkel  $n$ ,  $n'$  und  $\nu$  alle zusammen in erster Näherung den Wert  $\delta \sin \alpha$  oder  $\eta^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha$  haben, wie in vorstehender Gleichung (3) geschrieben ist.

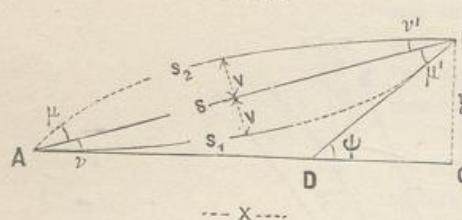
Aus (2) und (3) zusammen folgt:

$$\frac{1}{R'} = \eta^2 \frac{s}{R N} \sin \alpha \cos \alpha \quad (4)$$

Dabei ist  $R$  der Erdkrümmungs-Halbmesser im Azimut  $\alpha$  und  $N$  der Querkrümmungs-Halbmesser; indessen für den Zweck erster Näherungsbestimmungen brauchen wir das nicht zu unterscheiden; wir wollen schlechthin  $R = N = r$  gleich dem mittleren Erdkrümmungs-Halbmesser für eine Mittelbreite zwischen  $\varphi$  und  $\varphi'$  setzen, wie man es für Triangulierungen thut, also wird (4):

$$\frac{1}{R'} = \eta^2 \frac{s}{r^2} \sin \alpha \cos \alpha \quad (5)$$

Fig. 5.



Nun haben wir unsere 3 Linien nochmals dargestellt in Fig. 5. mit Annahme eines Coordinatensystems  $xy$ , das einer Abbildung in der Ebene entspricht, so dass nun die geodätische Linie  $As_1B$  als *Gerade* erscheint, und die beiden anderen Kurven mit ihren relativen geodätischen Krümmungen sich als Kurven  $As_1B$  und  $Bs_2A$  darstellen.

Die geodätische Linie  $AB$  kann zunächst selbst als Abscissenaxe betrachtet werden, und durch kurze geodätische Ordinaten-Linien rechtwinklig hiezu, können benachbarte Punkte hierauf bezogen werden, ähnlich wie auf der Kugel bei den Soldnerschen Coordinaten.

Was die dabei nötigen Vernachlässigungen betrifft, so wissen wir von (15) § 65. S. 365, dass die Ordinaten eines solchen Systems nur von der Ordnung  $\eta^2 \sigma^3$  sind. Die Ordinaten-Konvergenz (in erster Näherung sphärisch nach Fig. 3. S. 262 berechnet), wird dann nur von der Ordnung  $\eta^2 \sigma^4$ , woraus man weiter schliesst, dass es für unsere Zwecke genügt, die fraglichen Coordinaten wie ebene rechtwinklige Coordinaten zu behandeln, indem die kleinen Winkel  $\mu$  und  $\nu$  u. s. w. nur von der Ordnung  $\eta^2 \sigma^2$  erscheinen werden.

Diesen Bedingungen entsprechend ist das Coordinaten-System in Fig. 5. gezeichnet.  $AB$  ist das geradlinig erscheinende Abbild der geodätischen Linie  $AB$ ; jedoch als Abscissenaxe des Coordinaten-Systems wird nicht  $AB$ , sondern die Tangente  $AC$  des Normalschnittes von  $As_1B$  genommen, was mit gleicher Näherung zulässig ist.

Die Kurve  $As_1B$  denken wir uns dargestellt durch eine Gleichung  $y = f(x)$ , und die Reciproke des Krümmungs-Halbmessers  $R'$  dieser Kurve ist hinreichend ausgedrückt durch

$$\frac{1}{R'} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Da auch Abscisse  $x$  und Kurvenlänge  $\sqrt{d x^2 + d y^2}$  verwechselt werden dürfen, können wir mit Zuziehung von (5) auch schreiben:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \eta^2 \frac{x}{r^2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{x}{q} \quad (6)$$

$$\text{wobei } \frac{\eta^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r^2} = \frac{1}{q} \quad (7)$$

Die Kurvengleichung (6) zweimal integriert gibt:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{x^2}{2 q} \quad (8)$$

$$y = \frac{x^3}{6 q} \quad (9)$$

Integrations-Konstanten kommen nicht hinzu, weil für  $x = 0$  auch  $y = 0$  und  $\frac{d y}{d x} = 0$  werden soll.

Eine nicht zur Sache gehörige, aber den praktischen Landmesser rasch orientierende Zwischenbemerkung möchten wir nicht unterdrücken, nämlich dass die Kurve (9) nichts anderes ist, als die beim Eisenbahn-Kurven-Abstecken übliche cubische Parabel, welche als Übergangskurve zwischen Geraden und Kreisbögen dient.

Nun hat man nach dem Anblicke von Fig. 5.:

$$\left. \frac{d y}{d x} \right|_{x=s} = \frac{s^2}{2 q} = \psi = \mu' + r \quad (10)$$

$$\text{und } \left. \frac{y}{x} \right|_{x=s} = \frac{s^2}{6 q} = \nu \quad (11)$$

Auch die Kurvenlänge  $As_1B$ , kurz  $= s_1$  bezeichnet, lässt sich angeben, indem in Fig. 5. die Grenzabscisse  $AC = c$  gesetzt wird,

$$s_1 = \int_0^c \sqrt{1 + \left( \frac{d y}{d x} \right)^2} dx = \int_0^c \left( 1 + \frac{x^4}{8 q^2} \right) dx$$

$$s_1 = c + \frac{c^5}{40 q^2} \quad (12)$$

dazu die Länge der geodätischen Linie selbst:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{x=c} = \sqrt{c^2 + \frac{c^6}{36 q^2}} = c \left( 1 + \frac{c^4}{72 q^2} \right)$$

$$s = c + \frac{c^5}{72 q^2} \quad (13)$$

Die Differenz von (12) und (13) giebt, indem nun wieder  $c = s$  gesetzt wird:

$$s_1 - s = \frac{s^5}{q^2} \left( \frac{1}{40} - \frac{1}{72} \right) = \frac{s^5}{90 q^2} \quad (14)$$

Damit ist alles gefunden, was in Fig. 5. sich auf die untere Kurve  $As_1B$  bezieht; und um die entsprechende Untersuchung auch für die obere Kurve  $As_2B$  zu führen, könnte man auch die Gleichung dieser Kurve aufsuchen nach den Bedingungen, dass die Kurve durch die beiden Punkte  $A$  und  $B$  gehen und in  $A$  denselben Krümmungs-Halbmesser  $R'_a$  haben soll, welcher die erste Kurve im Punkte  $B$  hat  $= R'_b$ , denn wir haben ja schon in (4) eingesehen, dass innerhalb der ersten Näherung  $R'_a = R'_b$  ist. Dann ist aber auch die zweite Kurve  $s_2$  überhaupt keine

andere, als die erste Kurve  $s_1$ , nur liegt sie umgekehrt, und in Fig. 5. sind die Winkel  $\mu = \mu'$  und  $r = r'$ .

Wir wollen auch noch den Querabstand  $v$  zwischen der geodätischen Linie und jeder ihrer Begleitkurven bestimmen (vgl. Fig. 5.). Dieser Querabstand ist nach (9):

$$v = \frac{1}{2} \left( \frac{s^3}{6q} \right) - \frac{\left( \frac{s}{2} \right)^3}{6q} = \frac{s^3}{16q}$$

oder  $2v = \frac{s^3}{8q}$

(15)

Nun ist in allen unseren Formeln noch die eine Konstante  $q$  nach (7) enthalten, welche wir aber nicht unmittelbar einsetzen wollen, denn es lässt sich besser alles in dem Excess  $s$  nach Fig. 6. § 65. S. 364 ausdrücken, nämlich:

$$s = \frac{s^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2r^2}$$

also wegen (7):

$$\frac{1}{q} = 2\eta^2 s$$

und damit geben die verschiedenen vorstehenden Formeln:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Winkel:} & \mu = \frac{2}{3}\eta^2 s \quad r' = \frac{1}{3}\eta^2 s \\ & r = \frac{1}{3}\eta^2 s \quad \mu' = \frac{2}{3}\eta^2 s \\ \hline & \mu + r = \eta^2 s \quad \mu' + r' = \eta^2 s \end{array} \right\}$$
(16)

$$\text{Kurvenlängen} \quad s_1 - s = s_2 - s = \frac{2}{45}\eta^4 s \left( \frac{s}{\varrho} \right)^2$$
(17)

$$\text{Querabweichung} \quad 2v = \frac{1}{4}\eta^2 s \frac{e}{\varrho}$$
(18)

Der letzte Ausdruck stimmt überein mit dem früheren (15) § 65. S. 365.

Zu einem ersten Zahlenbeispiel wollen wir nehmen  $s = 100\,000^m$  und  $\varphi = 45^\circ$ , sowie  $\alpha = 45^\circ$ ; damit wird  $\log r = 6.8046$ ,  $\eta^2 = 0,00336$ , und damit zunächst  $s = 12,66''$

$$\begin{array}{ll} \mu = \mu' = 0,028'' & r = r' = 0,014'' \\ 2v = 0,005^m & s_1 - s = s_2 - s = 0,00000\,00002^m \end{array}$$

Der Wert  $2v = 5^{mm}$  stimmt mit dem früheren (16) § 65. S. 365. Ein zweites mehrfach von uns benütztes Beispiel mit der Mittelbreite  $\varphi = 50^\circ$ , den beiden Endbreiten  $49^\circ 30'$  und  $50^\circ 30'$  und  $\lambda = 1^\circ$  giebt:  $s = 132\,315^m$      $\alpha = 32^\circ 48'$

$$\begin{array}{ll} \log r = 6.80489 & \log \eta^2 = 7.44345 \\ \mu = \mu' = 0,0373'' & r = r' = 0,0187'' \\ 2v = 0,009^m & s_1 - s = s_2 - s = 0,00000\,00004^m \end{array}$$

Diese Zahlenbeispiele zeigen, dass für die gewöhnlichen Dreiecksseiten bei dem heutigen Stande der Messkunde die kleinen Winkel  $\mu$  und  $r$  vernachlässigt werden können. Die Differenz  $s_1 - s$  wäre nicht einmal mikroskopisch messbar.

#### Höhere Glieder der vorstehenden Formeln.

Man kann die Entwicklungen, welche im vorstehenden immer nur die ersten Näherungen berücksichtigt haben, auch auf diesem Wege noch weiter treiben, wie in

unserer 3. Auflage 1890, § 75. gezeigt worden ist; es hat aber keinen praktischen Zweck, und ist deswegen im vorstehenden nicht mehr berücksichtigt. Nur eine Sache davon wollen wir wenigstens mit Worten behandeln.

In Fig. 6. ist der besondere Fall behandelt, dass die Punkte *A* und *B*, zwischen welchen die geodätische Linie und die beiden Normalschnitte gezogen sind, auf gleicher Breite liegen.

In diesem Falle fallen die beiden Normalschnitte (vertikale Schnitte) in einen zusammen, und die geodätische Linie kann daher nicht mehr zwischen den beiden liegen.

Dass die geodätische Linie nicht selbst mit diesen beiden ebenen Schnitten zusammenfallen kann, ist unmittelbar einzusehen, insofern die geodätische Linie in diesem Fall nicht selbst eine ebene Kurve sein kann.

Die geodätische Linie verläuft dann über dem vertikalen Schnitte, aber mit so kleinen Winkeln  $\zeta$ , dass dieselben innerhalb der Näherungen unserer  $\mu$  und  $r$  von (16) gar nicht mehr zum Ausdruck kommen, die genauere Entwicklung giebt nämlich:

$$\zeta = \eta^2 \frac{s^3}{24 r^3} \operatorname{tang} \varphi = e'^2 \frac{s^3}{24 r^3} \sin \varphi \cos \varphi$$

Denkt man sich eine Dreiecksseite  $s = 100\,000''$  in der Breite  $\varphi = 45^\circ$ , so giebt dieses nur  $\zeta = 0,0001''$ .



## § 72. Bedeutung der geodätischen Linie für die praktischen Vermessungen.

Die geodätische Linie ist niemals Gegenstand der unmittelbaren Messung, sondern nur der Berechnung, und dadurch mittelbar ein Hilfsmittel für ausgedehnte geodätische Messungen.

Bei der Messung der einzelnen Dreiecke ist von geodätischen Linien nicht die Rede, denn die Sichten der Theodolit-Messung erfolgen zweifellos in vertikalen Schnitten, und nicht in geodätischen Linien; und auch die astronomischen Azimut-Messungen beziehen sich nicht auf die geodätische Linie, sondern ebenfalls auf vertikale Schnitte.

Man kann die gemessenen Azimute und die gemessenen Horizontal-Winkel von den vertikalen Schnitten auf die geodätischen Linien reduzieren, wie im vorigen § 71. gezeigt worden ist; die Reduktion beträgt sehr wenig, nämlich für  $45^\circ$  Breite und Azimut  $45^\circ$  bei einer Entfernung von  $100\,000''$  nur  $0,04''$  im Azimut, so dass diese Reduktion meist vernachlässigt wird.

Sei es nun, dass man diese kleinen Reduktionen (nebst anderen, z. B. Höhenreduktion von § 67) vernachlässigt, oder sie in Rechnung bringt; jedenfalls kann man letzteres thun, und an Stelle eines in Normalschnitten gemessenen Dreiecks-Netzes kann man also nun ein Dreiecks-Netz setzen, dessen Seiten geodätische Linien sind, und dessen Winkel von den horizontalen Tangenten der geodätischen Linien in den Eckpunkten eingeschlossen werden.

Wie man ein solches sphäroidisches Dreiecks-Netz geodätischer Linien in theoretischer Strenge berechnen kann, werden wir erst in einem späteren Kapitel kennen lernen; in der Praxis genügt fast immer die sphärische Dreiecks-Berechnung.