Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 72. Bedeutung der geodätischen Linie für die praktischen Vermessungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

unserer 3. Auflage 1890, § 75. gezeigt worden ist; es hat aber keinen praktischen Zweck, und ist deswegen im vorstehenden nicht mehr berücksichtigt. Nur *eine* Sache davon wollen wir wenigstens mit Worten behandeln.

In Fig. 6. ist der besondere Fall behandelt, dass die Punkte A und B, zwischen welchen die geodätische Linie und die beiden Normalschnitte gezogen sind, auf *gleicher* Breite liegen.

Fig. 6.

In diesem Falle fallen die beiden Normalschnitte (vertikale Schnitte) in *einen* zusammen, und die geodätische Linie kann daher nicht mehr *zwischen* den beiden liegen.

Dass die geodätische Linie nicht selbst mit diesen beiden ebenen Schnitten zusammenfallen kann, ist unmittelbar einzusehen, insofern die geodätische Linie in diesem Fall nicht selbst eine ebene Kurve sein kann.

Die geodätische Linie verläuft dann über dem vertikalen Schnitte, aber mit so kleinen Winkeln ζ, dass dieselben innerhalb der Näherungen unserer μ und ν von (16) gar nicht mehr zum Ausdruck kommen, die genauere Entwicklung giebt nämlich:

$$\zeta = \eta^2 \frac{s^3}{24\, r^3} \, tang\, \varphi = e'^2 \frac{s^3}{24\, r^3} \sin\varphi \cos\varphi$$

Denkt man sich eine Dreiecksseite $s = 100\,000^{m}$ in der Breite $\varphi = 45^\circ$, so giebt dieses nur $\zeta = 0{,}0001''$.

§ 72. Bedeutung der geodätischen Linie für die praktischen Vermessungen.

Die geodätische Linie ist niemals Gegenstand der unmittelbaren Messung, sondern nur der Berechnung, und dadurch mittelbar ein Hilfsmittel für ausgedehnte geodätische Messungen.

Bei der Messung der einzelnen Dreiecke ist von geodätischen Linien nicht die Rede, denn die Sichten der Theodolit-Messung erfolgen zweifellos in vertikalen Schnitten, und nicht in geodätischen Linien; und auch die astronomischen Azimut-Messungen beziehen sich nicht auf die geodätische Linie, sondern ebenfalls auf vertikale Schnitte.

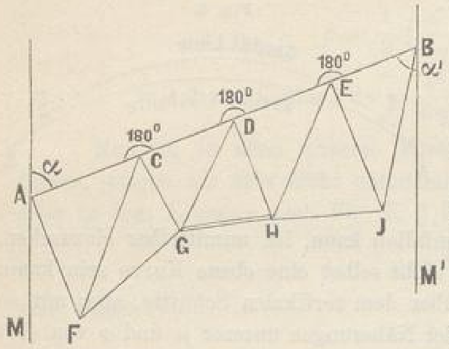
Man kann die gemessenen Azimute und die gemessenen Horizontal-Winkel von den vertikalen Schnitten auf die geodätischen Linien reduzieren, wie im vorigen § 71. gezeigt worden ist; die Reduktion beträgt sehr wenig, nämlich für 45° Breite und Azimut 45° bei einer Entfernung von $100\,000^{m}$ nur $0{,}04''$ im Azimut, so dass diese Reduktion meist vernachlässigt wird.

Sei es nun, dass man diese kleinen Reduktionen (nebst anderen, z. B. Höhenreduktion von § 67) vernachlässigt, oder sie in Rechnung bringt; jedenfalls *kann* man letzteres thun, und an Stelle eines in Normalschnitten gemessenen Dreiecks-Netzes kann man also nun ein Dreiecks-Netz setzen, dessen Seiten geodätische Linien sind, und dessen Winkel von den horizontalen Tangenten der geodätischen Linien in den Eckpunkten eingeschlossen werden.

Wie man ein solches sphäroidisches Dreiecks-Netz geodätischer Linien in theoretischer Strenge berechnen kann, werden wir erst in einem späteren Kapitel kennen lernen; in der Praxis genügt fast immer die sphärische Dreiecks-Berechnung.

Um nun weiter zu langen geodätischen Linien überzugehen, welche die Ausdehnung nicht bloss einzelner Dreiecks-Seiten, sondern ganzer Dreiecks-Ketten haben, wollen wir nach Fig. 1. die Annahme machen, eine Dreiecks-Kette zwischen den Punkten A und B enthalte einen Zug $ACDEB$, welcher in C, D und E bei der Messung zufällig lauter Winkel von 180° geliefert habe.

Fig. 1.

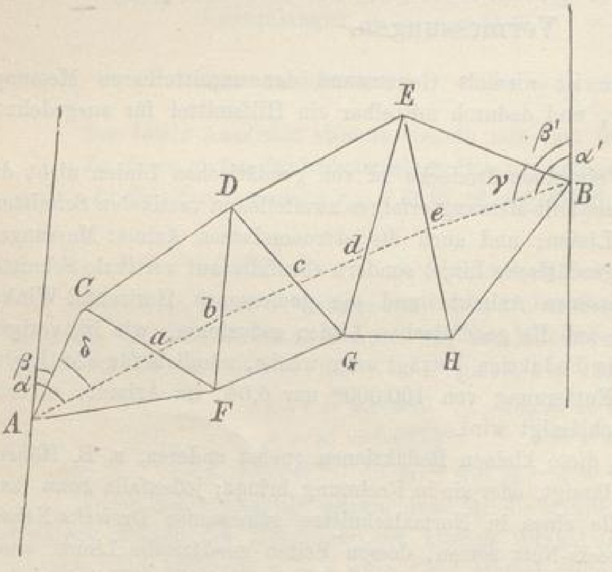


Dann kann die Linie $AC + CD + DE + EB = AB$, mit den Azimuten α und α' an ihren Endpunkten geradezu als *eine* lange geodätische Linie weiter behandelt werden, indem man in den einzelnen Strecken AC, CD u. s. w. die Azimut-Reduktionen zwischen der geodätischen Linie und den Normalschnitten entweder vernachlässigt, oder in Rechnung gebracht denkt.

Ohne diese kleinen Reduktionen erscheinen die Strecken AC, CD, DE u. s. w. mit Brechungs-Winkeln von 180°, als Elemente der geodätischen Linie AD in dem differentialen Sinne der früheren Fig. 2. § 68. S. 374.

Die in Fig. 1. gemachte Annahme, dass bei der Triangulierung zwischen A und B in den Punkten C, D und E Brechungs-Winkel von 180° erhalten werden, kann als Vorbereitung des allgemeineren Falles von Fig. 2. dienen, wobei die geodätische Linie zwischen A und B nicht mit Dreiecksseiten selbst zusammenfällt, sondern verschiedene Dreiecks-Seiten in den Punkten $a\,b\,c\,d\,e$ schneidet, und am Anfang und am Ende gewisse Winkel δ und γ mit Dreiecks-Seiten bildet.

Fig. 2.



Sobald man *einen* dieser Winkel δ und γ wüsste, könnte man die ganze geodätische Linie $A\,a\,b\,c\,d\,e\,B$ sphärisch berechnen, indem man die einzelnen Strecken als Seiten sphärischer Dreiecke behandelte, z. B. Aa als Seite des Dreiecks ACa oder AFa, dann ab als Seite des Dreiecks aFb u. s. w.
Die Azimut-Übertragung in a, b u. s. w. müsste stets nach dem Gesetz der gleichen Scheitel-Winkel geschehen, also so, dass Winkel AaC = Winkel baF u. s. w.

All dieses setzt, wie schon erwähnt, voraus, dass man den einen Winkel δ oder γ kenne, und da das in Wirklichkeit nicht genau der Fall ist, kann das ganze Verfahren nur *mittelbar* angewendet werden. Man rechnet nämlich die ganze Dreiecks-

Kette, mit Annahme eines mittleren Krümmungs-Halbmessers zuerst sphärisch durch, und dadurch sind auch die beiden Winkel δ und γ sphärisch bestimmt. Man kann zu ihrer Ausmittlung z. B. Soldner sche oder konforme Coordinaten oder sphärische geographische Coordinaten, oder irgend welche andere geschlossene oder entwickelte Formeln der sphärischen Trigonometrie anwenden; erste Näherungen der Winkel δ und γ werden sich jedenfalls finden lassen.

Mit einer solchen Näherung, z. B. für δ, beginnt man nun eine zweite schärfere Rechnung, formell auch sphärisch, aber so, dass in jedem der Dreiecke $A\,a\,F$, $b\,a\,F$, u. s. w. ein besonderer, der mittleren geographischen Breite des Dreiecks entsprechender Krümmungs-Halbmesser angewendet wird. Wenn dann am Ende das letzte Dreieck $E\,e\,B$ oder $e\,H\,B$ nicht schliesst, d. h. wenn man den Endpunkt B verfehlt hat, so kann man aus der Querabweichung und der Gesamtlänge $A\,B$ leicht eine Verbesserung berechnen, mit welcher die ganze Rechnung wiederholt und dann wohl zum Schluss gebracht werden kann.

Stimmt diese ganze Rechnung von A bis B in sich, sind also auch die Winkel δ und γ bekannt, so kann man auch die in A und B etwa gemessenen Azimute β und β', welche sich als astronomische Messungen auf die Dreiecks-Seiten $A\,C$ und $B\,E$ beziehen, nun auf die Azimute α und α' der geodätischen Linie $A\,B$, bzw. $B\,A$ reduzieren, denn es ist:

$$\alpha = \beta + \delta \quad , \quad \alpha' = \beta' + \gamma \qquad (1)$$

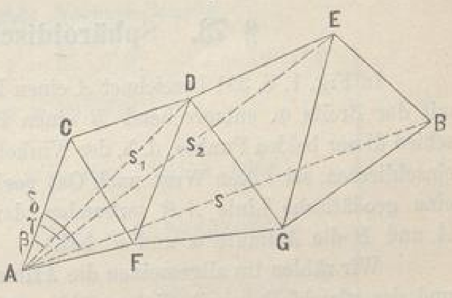
Sphärische Polar-Coordinaten.

Von den verschiedenen möglichen Formen der sphärischen Coordinaten, die wir erwähnt haben, wollen wir *eine* Form, nämlich sphärische Polar-Coordinaten noch besonders betrachten, weil diese Form bei Bessel s „Gradmessung in Ostpreussen" zur Anwendung kam und zu manchen Erörterungen Veranlassung gegeben hat.

Denken wir uns in Fig. 3., welche im wesentlichen dieselbe Bedeutung hat, wie Fig. 2., ausser $A\,B$ auch noch die Linien $A\,D$ und $A\,E$ gezogen, so ist klar, dass man das Dreieck $A\,C\,D$ berechnen kann aus den zwei Seiten $A\,C$, $C\,D$ und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bei C. Damit hat man die Entfernung $A\,D = s_1$ und auch den Winkel β bei A, und alle Winkel bei D.

Man kann daher nun ein zweites langgestrecktes Dreieck $A\,D\,E$ berechnen, welches die neue Entfernung $A\,E = s_2$, den kleinen Winkel $\gamma - \beta$ bei A und alle Winkel bei E liefert. Ein letztes langgestrecktes Dreieck endlich liefert die Entfernung $A\,B = s$, den kleinen Winkel $\delta - \gamma$ bei A, also auch δ selbst, und alle Winkel bei B. Hiebei kann man die einzelnen Dreiecke nicht bloss sphärisch, sondern auch sphäroidisch berechnen. Ein Zahlenbeispiel zu dem Bessel schen Verfahren gab unsere 2. Auflage 1878, S. 340 bis 342, und verschiedene Citate hiezu gab 3. Auflage 1890, S. 385.

Fig. 3.



Sphäroidische Coordinaten.

Ein letztes, und wohl das beste Verfahren, lange geodätische Linien aus Dreieckketten zu berechnen, können wir durch vorgreifendes Citieren der Theorieen unserer nächsten Kapitel angeben: Man rechnet die geodätische Übertragung von Länge, Breite und Azimut schrittweise von Dreiecksseite zu Dreiecksseite durch die ganze Kette hindurch nach § 77. (oder auch nach § 74.) und dann kann man die ganze Linie vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt nach Kap. VII. berechnen.

Bei diesem Verfahren braucht man, ohne indirekt rechnen zu müssen, nicht *mehr* Voraussetzungen zu machen, in Bezug auf die Erddimensionen und auf die Breiten des Anfangspunktes und das Azimut der Anfangs-Richtung, als unbedingt nötig ist. Eine völlig voraussetzungslose Berechnung geodätischer Linien giebt es nicht.

Über die Bedeutung der geodätischen Linie für die praktische Geodäsie im allgemeinen lässt sich so viel sagen: Die Einführung der Theorie der geodätischen Linie in der Geodäsie ist keine Notwendigkeit, wie z. B. die Theorie der geradlinigen ebenen Dreiecke es für die ebene Triangulierung ist; man könnte die Aufgaben der höheren Geodäsie auch z. B. durch Sehnen-Dreiecke und polyedrisch-räumliche Punkt-Bestimmungen und in noch manch anderer Weise behandeln; allein die geodätische Linie hat sich bis jetzt als bestes Mittel bewährt, zwischen den unmittelbaren geodätischen und astronomischen Messungen einerseits und den Annahmen über die Erdoberfläche andererseits, die nötigen mathematischen Beziehungen herzustellen.

Kapitel VII.

Geodätische Coordinaten.

Vorbemerkung. Wir werden in diesem Kapitel im wesentlichen das mit der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid behandeln, was schon in Kapitel V. mit dem Normalschnitt auf der Kugel gemacht worden ist.

Der Übergang von der Kugel zum Ellipsoid von § 54. mit Hilfe des elliptischen Meridianbogens und des „verkürzten" Breitenunterschiedes $\frac{\varDelta\varphi}{V^2}$ war ein erster Notbehelf, welcher genügte, um die sphärischen Coordinaten-Formeln dem Ellipsoid anzupassen und in übertragener Form für erstes Verständnis unserer Landesvermessungen plausibel zu machen. Mit der Theorie der geodätischen Linie wird all das in neuer und heller Beleuchtung erscheinen.

§ 73. Sphäroidisches Polar-Dreieck.

In Fig. 1. S. 391 bezeichnet A einen Punkt des Umdrehungs-Ellipsoids (Sphäroids) mit der Breite φ, entsprechend B einen Punkt mit der Breite φ'; der Längen-Unterschied dieser beiden Punkte, d. h. der Winkel, welchen ihre Meridian-Ebenen NA und NB einschliessen, sei l (von West nach Ost positiv gezählt). Die beiden Punkte sind durch eine geodätische Linie AB verbunden, deren lineare Grösse $= s$ sei und welche bei A und B die Azimute α und α' hat.

Wir zählen im allgemeinen die Azimute von Nord über Ost, wie α im Punkt A; und das gleichfalls nordöstlich gezählte Azimut im Punkte B wäre also $= \alpha' \pm 180°$, wenn α' der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel ist.