Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 75. Näherungs-Formeln bis s³.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Meridianbogenlänge.

Unsere Formeln enthalten auch den besonderen Fall der Meridianbogen-Rektifizierung, wenn das Azimut $\alpha =$ Null wird. Setzen wir dann auch den zugehörigen Wert $s = m$, so werden wir aus (25) folgendes erhalten bis zur dritten Ordnung:

$$\frac{\varphi'-\varphi}{V^2} = \frac{m}{N} - \frac{3}{2}\eta^2 t \frac{m^2}{N^2} + \frac{m^3}{N^3}\frac{\eta^2}{2}(t^2 - 1 - \eta^2 + 5\eta^2 t^2) \qquad (29)$$

Dieses ist die Umkehrung der früheren Formel (37) in § 35. S. 218, wie sich deutlicher zeigt, wenn man jene Formel so schreibt:

$$\frac{m}{N} = \frac{\varphi'-\varphi}{V^2} + \left(\frac{\varphi'-\varphi}{V^2}\right)^2 \frac{3}{2}\eta^2 t - \left(\frac{\varphi'-\varphi}{V^2}\right)^3 \frac{\eta^2}{2}(t^2 - 1 - \eta^2 - 4\eta^2 t^2) \qquad (30)$$

Dass diese beiden Formeln (29) und (30) unter sich übereinstimmen, kann man leicht durch genäherte Auflösung nachweisen.

Die erste Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie (bis s^3 einschliesslich) zur Übertragung von Breiten, Längen und Azimuten, ist gegeben von Legendre in den Memoiren der Pariser Akademie von 1806. Diese Legendreschen Formeln sind bei der badischen Landesvermessung benützt worden. Helmert, höhere Geodäsie I. 1880, S. 296—300 giebt die Entwicklungen bis zur dritten Ordnung mit e^2 und dann noch 4.—5. Ordnung sphärisch, mit Litteraturangaben S. 300. Um die in vorstehendem § 74. behandelten Reihenentwicklungen praktisch im Grossen anzuwenden, müsste man bequeme und genaue Coëfficienten-Tabellen herstellen, wobei in den Reihen (25)—(27) die Coëfficienten mit *allen* Gliedern η^2 einzuführen wären.

Von der Vermessung des Staates New-York und von der Küsten- und Landesvermessung der Vereinigten Staaten wird ein solches Verfahren angegeben in einem Berichte in der „Zeitschr. f. Verm." 1890, S. 177—179.

Bei der preussischen Landesaufnahme sind Formeln von ähnlichem Charakter im Gebrauche, die wir schon in § 39. S. 228 und § 59. S. 331 erwähnt haben, Schreiber, „Rechnungsvorschriften" u. s. w.: Die zugehörigen Entwicklungen sind amtlich nicht veröffentlicht, aber in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen I", 1881, S. 113—121. Man kann diese Schreibersche Theorie kurz bezeichnen als eine sphäroidische Weiterführung der Gaussschen sphärischen Behandlung des Polardreiecks nach Fig. 3. § 60. S. 343. Die praktische Anwendung der Schreiberschen Rechenvorschriften verlang die Ausrechnung von 19 Gliedern ähnlicher Art wie die 19 Glieder der Formeln (25)—(27).

§ 75. Näherungs-Formeln bis s^3.

Wie die Ausrechnungen am Schlusse des vorigen § 74. S. 396 zeigen, kann man mit den Potenzreihen bis zur 4ten Ordnung bei Entfernungen bis zu rund 100^{km} oder Breiten- und Längen-Differenzen bis zu 1° eine Genauigkeit bis zu etwa 0,0001″ erreichen.

Die Rechnung ist aber etwas umständlich, und würde nur etwa durch Beigabe ausführlicher Coëfficienten-Tabellen die nötige Geschmeidigkeit erlangen, man hat in der Breite 7 Glieder und in Länge und Azimut je 6 Glieder.

Anders steht die Sache, wenn man nur Näherungswerte auf etwa 0,1″ genau berechnen will, welche nach dem später zu beschreibenden Verfahren von § 77. noch verbessert werden sollen. In diesem Falle rechnet man nur die Hauptglieder mit dem Coëfficienten [2] streng, nebst V^2 bei der Breite, im übrigen nimmt man nur noch die sphärischen Glieder (setzt also $\eta^2 = 0$) und kann dann die Coëfficienten-Tabelle unseres Anhangs Seite [47]—[51] benützen.

In diesem Sinne haben wir die Ausrechnung auf S. 398 gemacht, in den Hauptgliedern nur 6 stellig, dann 5- und 4 stellig. Die Genauigkeit geht auf 0,01″ und 0,03″ in Breite und Länge, und auf 0,10″ im Azimut, was alles als erste Näherung für späteren Gebrauch in § 77. vollauf genügend ist.

Geographische Coordinaten.

Näherungs-Berechnung bis zur dritten Ordnung.

Gegeben $\varphi = 49^\circ\, 30'\, 0{,}0''$ $\alpha = 32^\circ\, 25'\, 21{,}5''$ $\log s = 5.121\,610$

Hilfstafel S. [21] giebt für φ:

$\log V^2 = 0.001\,229$

$\log tang\, \varphi = \log t = 0.068\,501$

$\log t^2 = 0.137\,002$

$\log \cos \varphi = 9.812\,544$

$\log [2]$	8.508 942	$\log [2]$	8.508 942
$\log \sin \alpha$	9.729 295	$\log \cos \alpha$	9.926 402
$\log s$	5.121 610	$\log s$	5.121 610
$\log v$	3.359 847	$\log u$	3.556 954
$\log v^2$	6.719 694	$\log u^2$	7.113 908
$\log v^3$	0.079 541		

$$\varphi' - \varphi = V^2 u - \frac{V^2}{2\varrho} v^2 t - \frac{V^2}{6\varrho^2} v^2 u (1 + 3t^2) - \frac{3V^2}{2\varrho} u^2 e'^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$\log V^2$	0.001 229	$-V^2$	0.00123^n	$-V^2$	0.0012_n	$-V^2$	0.0012_n
$\log u$	3.556 954	v^2	6.71969	v^2	6.7197	u^2	7.1139
$V^2 u$	3.558 183	t	0.06850	u	3.5570	$3e'^2 : 2\varrho$	2.6861
$+ 3615{,}63''$		$1 : 2\varrho$	4.38454	$1 + 3t^2$	0.7088	$\sin \varphi$	9.8810
$= + 1^\circ\, 0'\, 15{,}63''$			1.17396^n	$1 : 6\varrho^2$	8.5930	$\cos \varphi$	9.8125
			$-14{,}93''$		9.5797_n		9.4947_n
					$-0{,}38''$		$-0{,}31''$

$$l = \frac{v}{\cos \varphi} + \frac{v\,u\,t}{\varrho \cos \varphi} - \frac{v^3 t^2}{3\varrho^2 \cos \varphi} + \frac{v\,u^2 (1 + 3t^2)}{3\varrho^2 \cos \varphi}$$

$\log v$	3.359 847	$v \sec \varphi$	3.54730	$-v \sec \varphi$	3.5473_n	$v \sec \varphi$	3.5473
$\log \sec \varphi$	0.187 456	u	3.55695	v^2	6.7197	u^2	7.1139
$v \sec \varphi$	3.547 303	t	0.06850	t^2	0.1370	$1 + 3t^2$	0.7088
$+ 3526{,}17''$		$1 : \varrho$	4.68557	$1 : 3\varrho^2$	8.8940	$1 : 3\varrho^2$	8.8940
$= + 0^\circ\, 58'\, 46{,}17''$			1.85832_n		9.2980_n		0.2640
			$+ 72{,}16''$		$-0{,}20''$		$+1{,}84''$

$$\alpha' - \alpha = v\,t + \frac{v\,u}{2\varrho}(1 + 2t^2) - \frac{v^3 t}{6\varrho^2}(1 + 2t^2) + \frac{v\,u^2 t}{6\varrho^2}(5 + 6t^2)$$

$\log v$	3.359 847	v	3.35985	$-v\,t$	3.4283_n	$v\,t$	3.4283
$\log t$	0.068 501	u	3.55695	v^2	6.7197	u^2	7.1139
$v\,t$	3.428 348	$1 + 2t^2$	0.57306	$1 + 2t^2$	0.5731	$5 + 6t^2$	1.1214
$+ 2681{,}32$		$1 : 2\varrho$	4.38454	$1 : 6\varrho^2$	8.5930	$1 : 6\varrho^2$	8.5930
$= + 44'\, 41{,}32''$			1.87440		9.3141_n		0.2566
			$+ 74{,}89''$		$-0{,}21''$		$+1{,}81''$

Zusammenfassung:

$\varphi = 49^\circ\, 30'\, 0{,}00'' - 14{,}93''$	$+ 0^\circ\, 58'\, 46{,}17'' - 0{,}20''$	$\alpha = 32^\circ\, 25'\, 21{,}50'' - 0{,}21''$
$+ 1 \quad 0 \quad 15{,}63 \quad - 0{,}38$	$+ 1 \quad 12{,}16$	$+ 0 \quad 44 \quad 41{,}32$
$- 0{,}31$	$+ 1{,}84$	$+ 1 \quad 14{,}89$
		$+ 1{,}81$
$\underbrace{+ 50^\circ\, 30'\, 15{,}63'' - 15{,}62''}$	$\underbrace{+ 1^\circ\, 0'\, 0{,}17'' - 0{,}20''}$	$\underbrace{+ 33^\circ\, 11'\, 19{,}52'' - 0{,}21''}$
$\varphi' = 50^\circ\, 30'\, 0{,}01''$	$l = + 0^\circ\, 59'\, 59{,}97''$	$\alpha' = 33^\circ\, 11'\, 19{,}31''$
soll $0{,}00''$	soll $60{,}00''$	soll $19{,}41''$