Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 76. Sphärische Mittelbreiten-Formeln

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

§ 76. Sphärische Mittelbreiten-Formeln.

Obgleich die sphärischen Mittelbreiten-Formeln nach Gauss schon in unserem früheren § 62. entwickelt sind, wollen wir doch, ehe auf die sphäroidischen Formeln dieser Art übergegangen wird, nochmals die Sache sphärisch betrachten.

Wenn wir also hier noch eine zweite Herleitung der sphärischen Mittelbreiten-Formeln vornehmen, so geschieht es nicht bloss in dem Sinne einer Versicherung der ersten Herleitung, sondern vielmehr zum Zweck der Vorbereitung entsprechender sphäroidischer Formeln, mit welchen wir uns im folgenden § 77. beschäftigen werden.

In Fig. 1. betrachten wir 3 Punkte mit den Breiten φ_1, φ, φ_2, wobei φ der Mittelwert ist, d. h.:

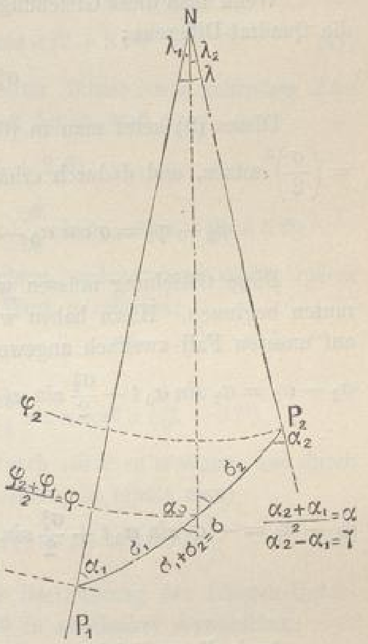
$$\varphi_2 - \varphi = \varphi - \varphi_1 \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \qquad (1)$$

Da die Breiten-Unterschiede $\varphi - \varphi_1$ und $\varphi_2 - \varphi$ hiernach gleich sein sollen, so werden für einen Bogen, welcher die drei Parallelen zu den Breiten φ_1, φ, φ_2 schneidet, die Abstände σ_1 und σ_2, deren Summe $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$ sei, nicht gleich, aber auch nicht sehr ungleich werden, und ähnlich verhält es sich mit den zugehörigen Längen-Unterschieden λ_1 und λ_2, deren Summe $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ sei.

Die Azimute, welche der Bogen in den Breiten φ_1, φ und φ_2 hat, seien bezw. α_1, α_0 und α_2, und es werden dabei ähnliche Verhältnisse stattfinden, wie bei den Längen-Unterschieden, d. h. es werden $\alpha_0 - \alpha_1$ und $\alpha_2 - \alpha_0$ nicht sehr verschieden sein; das Mittel aus α_1 und α_2 sei mit α bezeichnet, d. h.:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha \qquad (2)$$

Fig. 1.



Dieses Mittel wird nicht gleich α_0, aber auch nicht sehr viel von α_0 verschieden sein.

Eine frühere Abkürzung sei hier wieder benützt, nämlich:

$$tang\, \varphi = t \qquad (3)$$

und nun wenden wir die Potenzreihe für den Breiten-Unterschied (27) § 64. S. 359 auf unsern Fall zweifach an, und erhalten:

$$\varphi_2 - \varphi = \sigma_2 \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^2}{2} \sin^2 \alpha_0\, t - \frac{\sigma_2^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 \,(1 + 3\, t^2) \qquad (4)$$

$$\varphi_1 - \varphi = -\sigma_1 \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_1^2}{2} \sin^2 \alpha_0\, t + \frac{\sigma_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 \,(1 + 3\, t^2) \qquad (5)$$

Diese zwei Gleichungen geben subtrahiert:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\sigma_2 + \sigma_1) \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \sin^2 \alpha_0\, t - \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 \,(1 + 3\, t^2) \qquad (6)$$

Ferner giebt wegen der Gleichheit der Breiten-Unterschiede nach (1) die Addition von (4) und (5):

$$0 = (\sigma_2 - \sigma_1) \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{2} \sin^2 \alpha_0 \, t - \frac{\sigma_2^3 - \sigma_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2) \tag{7}$$

Dieses ist eine Gleichung zur Bestimmung der Differenz $\sigma_2 - \sigma_1$, und da man sofort sieht, dass diese Differenz von der Ordnung σ^2 ist, kann man in (7) das letzte Glied weglassen, und im zweiten Gliede $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$ setzen, so dass man damit aus (7) erhält:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{\sigma^2}{4} \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t \tag{8}$$

Wenn man diese Gleichung mit $\sigma_2 + \sigma_1 = \sigma$ multipliziert, so erhält man auch die Quadrat-Differenz:

$$\sigma_2^2 - \sigma_1^2 = \frac{\sigma^3}{4} \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t \tag{9}$$

Dieses (9) setzt man in (6), zugleich darf man dort im letzten Gliede $\sigma_2^3 = \sigma_1^3 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^3$ setzen, und dadurch erhält man:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha_0 - \frac{\sigma^3}{8} \frac{\sin^4 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 - \frac{\sigma^3}{24} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha (1 + 3 t^2) \tag{10}$$

Diese Gleichung müssen wir zunächst so stehen lassen und nun mit den Azimuten beginnen. Hiezu haben wir in (29) § 64. S. 359 die nötige Gleichung, welche auf unseren Fall zweifach angewendet giebt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_0 = \sigma_2 \sin \alpha_0 \, t + \frac{\sigma_2^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2) - \frac{\sigma_2^3}{6} \sin^3 \alpha_0 \, t (1 + 2 t^2) \\ + \frac{\sigma_2^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \, t (5 + 6 t^2) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_0 = - \sigma_1 \sin \alpha_0 \, t + \frac{\sigma_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma_1^3}{6} \sin^3 \alpha_0 \, t (1 + 2 t^2) \\ - \frac{\sigma_1^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \, t (5 + 6 t^2) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Auch diese Gleichungen (11) und (12) werden subtrahiert und addiert; zuerst giebt die Subtraktion:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 = (\sigma_2 + \sigma_1) \sin \alpha_0 \, t + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2) \\ - \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6} \sin^3 \alpha_0 \, t (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \, t (5 + 6 t^2) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Bei der Addition von (11) und (12) lassen wir die Differenzen dritter Ordnung $\sigma_2^3 - \sigma_1^3$ ganz fort, da dieselben auf Glieder von der Ordnung σ^4 führen würden; indem wir dann auch das Mittel-Azimut $= \alpha$ setzen, wie in (2) angenommen wurde, erhalten wir aus (11) und (12) durch Addition:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \alpha_0 = \alpha - \alpha_0 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin \alpha_0 \, t + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{4} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2)$$

und setzt man hier noch die Differenz $\sigma_2 - \sigma_1$ nach (8) ein, so erhält man:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\sigma^2}{8} \frac{\sin^3 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \frac{\sigma^2}{8} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2) \tag{14}$$

Hieraus bilden wir zu verschiedenem Gebrauche:

$$\sin \alpha_0 = \sin \alpha - \frac{\sigma^2}{8} \sin^3 \alpha \, t^2 - \frac{\sigma^2}{8} \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 2 t^2) \tag{15}$$

$$\cos \alpha_0 = \cos \alpha + \frac{\sigma^2}{8} \frac{\sin^4 \alpha}{\cos \alpha} t^2 + \frac{\sigma^2}{8} \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + 2 t^2) \tag{16}$$

In diesen (15) und (16) ist in den Gliedern mit σ^2 schlechthin α statt des aus (14) sich ergebenden α_0 geschrieben, weil nach (14) sich α und α_0 selbst nur um Glieder von der Ordnung σ^2 unterscheiden.

Nun kehren wir wieder zu der Gleichung (10) zurück, setzen im ersten Gliede daselbst (16) ein, und erhalten, da die quadratischen Glieder sich heben:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha + \frac{\sigma^3}{24} \sin^2 \alpha \cos \alpha (2 + 3 t^2) \tag{17}$$

Auch die Gleichung (13) lässt sich nun weiter führen; wir schreiben diese Gleichung zunächst von neuem mit Zusammenziehung der σ_2 und σ_1:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha_0 \, t + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2)$$
$$- \frac{\sigma^3}{24} \sin^3 \alpha_0 \, t (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \, t (5 + 6 t^2)$$

Hier hat man zuerst $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$ nach (9) einzusetzen, wodurch man erhält, indem man zugleich in den Gliedern mit σ^3 statt α_0 den Wert α schreibt:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha_0 \, t + \frac{\sigma^3}{8} \sin^3 \alpha \, t (1 + 2 t^2)$$
$$- \frac{\sigma^3}{24} \sin^3 \alpha \, t (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha \cos^2 \alpha \, t (5 + 6 t^2)$$

Auch hat man noch im ersten Gliede $\sin \alpha_0$ durch $\sin \alpha$ zu ersetzen, was durch (15) geschieht; und wenn man zusammenfasst und ordnet, so erhält man:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha \, t + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha \, t \left(\sin^2 \alpha (2 + t^2) + 2 \cos^2 \alpha\right) \tag{18}$$

Nun bleibt als dritte Aufgabe nur noch die Bestimmung des Längen-Unterschiedes λ. Hiezu haben wir nach (28) § 64. S. 359 in zweifacher Anwendung:

$$\lambda_2 \cos \varphi = \quad \sigma_2 \sin \alpha_0 + \sigma_2^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \, t - \frac{\sigma_2^3}{3} \sin^3 \alpha_0 \, t^2 + \frac{\sigma_2^3}{3} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3 t^2)$$

$$- \lambda_1 \cos \varphi = - \sigma_1 \sin \alpha_0 + \sigma_1^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \, t + \frac{\sigma_1^3}{3} \sin^3 \alpha_0 \, t^2 - \frac{\sigma_1^3}{3} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3 t^2)$$

Durch Subtraktion bekommt man, sofort die Glieder dritter Ordnung zusammennehmend, und in diesen Gliedern α statt α_0 schreibend:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha_0 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \sin \alpha \cos \alpha \, t - \frac{\sigma^3}{12} \sin^3 \alpha \, t^2 + \frac{\sigma^3}{12} \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 3 t^2)$$

Wenn man wieder, wie in den beiden vorigen Fällen, $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$ nach (9) und $\sin \alpha_0$ nach (15) einsetzt, so erhält man:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha (\sin^2 \alpha \, t^2 - \cos^2 \alpha) \tag{19}$$

Die Differenz $\lambda_2 - \lambda_1$ haben wir hiebei nicht gebraucht; der Gleichförmigkeit wegen wollen wir jedoch diese Differenz auch angeben, nämlich:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \sin \varphi = \frac{\sigma^2}{4} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} t + \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \, t \tag{20}$$

Unsere gestellte Aufgabe ist in den Gleichungen (17), (18), (19) gelöst, die wir in etwas anderer Form nun zusammenstellen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{24}(2\,\sigma^2 \sin^2 \alpha + 3\,\sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi)\right) \tag{21}$$

$$\lambda = \frac{\sigma \sin \alpha}{\cos \varphi}\left(1 + \frac{1}{24}(\sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi - \sigma^2 \cos^2 \alpha)\right) \tag{22}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{1}{24}(2\,\sigma^2 + \sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi)\right) \tag{23}$$

Hier kann man in den Korrektions-Gliedern setzen:

$$\sigma \cos \alpha = \beta \qquad \sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \qquad \sigma \sin \alpha \tan \varphi = \gamma \tag{24}$$

wobei β ein Näherungs-Wert für $\varphi_2 - \varphi_1$ und γ ein Näherungs-Wert für $\alpha_2 - \alpha_1$ sein soll. Ausserdem bestehen die Näherungs-Gleichungen

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad , \quad \sigma^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \tag{25}$$

Wenn man dieses in (21) und (22) berücksichtigt und die Gleichungen umstellt, dann (22) und (23) dividiert, so erhält man:

$$\sigma \cos \alpha = (\varphi_2 - \varphi_1)\left(1 - \frac{1}{24}(3\,\lambda^2 - \lambda^2 \cos^2 \varphi)\right) \tag{26}$$

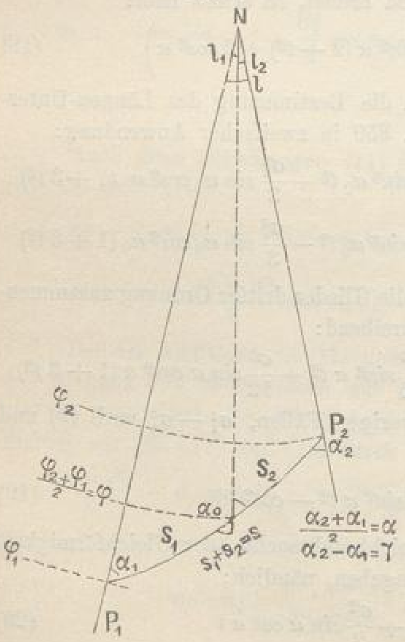
$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 - \frac{1}{24}(\lambda^2 \sin^2 \varphi - \beta^2)\right) \tag{27}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{24}(3\,\beta^2 + 2\,\lambda^2 \cos^2 \varphi)\right) \tag{28}$$

Dieses sind dieselben Gleichungen wie (17), (16), (18) § 62. S. 350; und es sind also jene Gleichungen hiemit zum zweitenmale hergeleitet.

§ 77. Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln.

Fig. 1.



Dasselbe, was wir im vorigen § 76. sphärisch gemacht haben, müssen wir nun auch sphäroidisch mit der geodätischen Linie thun.

Wir werden dabei eine Entwicklung bekommen, welche der sphärischen Entwicklung ganz entsprechend ist, welche sogar alle früheren Glieder von § 76. wieder enthält, aber noch weitere Glieder von der Ordnung η^2 und η^4 hinzubringen wird, und da wir in § 76. eine gute Vorbereitung haben, können wir uns mit der neuen Entwicklung kurz fassen.

Die Bezeichnungen nehmen wir wieder im wesentlichen wie in § 62., indem die nebenstehende Fig. 1. sich von der früheren Fig. 1. S. 349 nur dadurch unterscheidet, dass überall s statt σ, und bei den Längen l statt λ steht.

Unter s verstehen wir eine geodätische Linie, linear gemessen, und unter S die entsprechende Reduktion auf Centriwinkel durch Division mit dem Quer-Krümmungs-Halbmesser N d. h. wir wollen setzen: