Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 77. Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Unsere gestellte Aufgabe ist in den Gleichungen (17), (18), (19) gelöst, die wir in etwas anderer Form nun zusammenstellen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{24}(2\,\sigma^2 \sin^2 \alpha + 3\,\sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi)\right) \tag{21}$$

$$\lambda = \frac{\sigma \sin \alpha}{\cos \varphi}\left(1 + \frac{1}{24}(\sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi - \sigma^2 \cos^2 \alpha)\right) \tag{22}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{1}{24}(2\,\sigma^2 + \sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi)\right) \tag{23}$$

Hier kann man in den Korrektions-Gliedern setzen:

$$\sigma \cos \alpha = \beta \qquad \sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \qquad \sigma \sin \alpha \tan \varphi = \gamma \tag{24}$$

wobei β ein Näherungs-Wert für $\varphi_2 - \varphi_1$ und γ ein Näherungs-Wert für $\alpha_2 - \alpha_1$ sein soll. Ausserdem bestehen die Näherungs-Gleichungen

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad , \quad \sigma^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \tag{25}$$

Wenn man dieses in (21) und (22) berücksichtigt und die Gleichungen umstellt, dann (22) und (23) dividiert, so erhält man:

$$\sigma \cos \alpha = (\varphi_2 - \varphi_1)\left(1 - \frac{1}{24}(3\,\lambda^2 - \lambda^2 \cos^2 \varphi)\right) \tag{26}$$

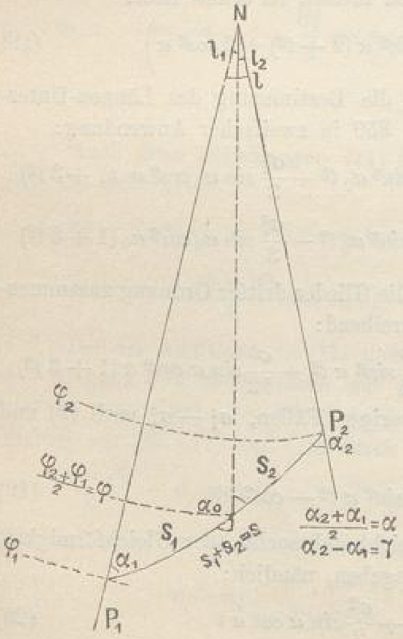
$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 - \frac{1}{24}(\lambda^2 \sin^2 \varphi - \beta^2)\right) \tag{27}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{24}(3\,\beta^2 + 2\,\lambda^2 \cos^2 \varphi)\right) \tag{28}$$

Dieses sind dieselben Gleichungen wie (17), (16), (18) § 62. S. 350; und es sind also jene Gleichungen hiemit zum zweitenmale hergeleitet.

§ 77. Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln.

Fig. 1.



Dasselbe, was wir im vorigen § 76. sphärisch gemacht haben, müssen wir nun auch sphäroidisch mit der geodätischen Linie thun.

Wir werden dabei eine Entwicklung bekommen, welche der sphärischen Entwicklung ganz entsprechend ist, welche sogar alle früheren Glieder von § 76. wieder enthält, aber noch weitere Glieder von der Ordnung η^2 und η^4 hinzubringen wird, und da wir in § 76. eine gute Vorbereitung haben, können wir uns mit der neuen Entwicklung kurz fassen.

Die Bezeichnungen nehmen wir wieder im wesentlichen wie in § 62., indem die nebenstehende Fig. 1. sich von der früheren Fig. 1. S. 349 nur dadurch unterscheidet, dass überall s statt σ, und bei den Längen l statt λ steht.

Unter s verstehen wir eine geodätische Linie, linear gemessen, und unter S die entsprechende Reduktion auf Centriwinkel durch Division mit dem Quer-Krümmungs-Halbmesser N d. h. wir wollen setzen:

$$\frac{s}{N} = S \quad \text{oder} \quad \frac{s}{N}\varrho = S \tag{1}$$

je nachdem in analytischem oder geometrischem Masse gerechnet wird. Wir wollen auch wieder als Abkürzung nehmen:

$$\frac{s \sin \alpha}{N} = S \sin \alpha = v \quad \text{und} \quad \frac{s \cos \alpha}{N} = S \cos \alpha = u \tag{1 a}$$

Damit erhalten wir aus der Breiten-Formel (25) § 74. S. 395 als Anwendung auf den nördlichen Teil unserer Fig. 1. folgendes:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi_2 - \varphi}{V^2} = S_2 \cos \alpha_0 - \frac{S_2^2}{2} t (\sin^2 \alpha_0 + 3 \eta^2 \cos^2 \alpha_0)\\ \frac{S_2^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2)\\ \frac{S_2^3}{6} \cos^3 \alpha_0 (3 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 - 15 \eta^4 t^2)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die entsprechende Formel für $\varphi_1 - \varphi$ hat überall $-S_1$ statt S_2, also:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{V^2} = -S_1 \cos \alpha_0 - S_1^2 \ldots + \frac{S_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos_0 \ldots + \frac{S_1^3}{6} \cos^3 \alpha_0 \ldots \tag{2a}$$

Diese beiden Gleichungen geben subtrahiert:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = (S_2 + S_1) \cos \alpha_0 - \frac{S_2^2 - S_1^2}{2} t (\sin^2 \alpha_0 + 3 \eta^2 \cos^2 \alpha_0)\\ - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2)\\ - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \cos^3 \alpha_0 (3 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 - 15 \eta^4 t^2)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ferner giebt die Addition von (3) und (3 a):

$$0 = (S_2 - S_1) \cos \alpha_0 - \frac{S_2^2 + S_1^2}{2} t (\sin^2 \alpha_0 + 3 \eta^2 \cos^2 \alpha_0)$$

also:

$$S_2 - S_1 = \frac{S^2}{4} t \left(\frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} + 3 \eta^2 \cos \alpha_0\right) \tag{4}$$

Dieses (4) in (3) eingesetzt giebt nach Ordnung der Glieder:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = S \cos \alpha_0 - \frac{S^3}{24} \Big(3 \frac{\sin^4 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2 + 9 \eta^2 t^2)\\ + \cos^3 \alpha_0 (3 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 + 12 \eta^4 t^4)\Big)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ehe wir dieses weiter verfolgen, machen wir dieselbe Behandlung auch mit den Azimuten, d. h. nach (27) § 74. S. 396:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2 - \alpha_0 = S_2 \sin \alpha_0 t + \frac{S_2^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2 + \eta^2\\ - \frac{S_2^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) + \frac{S_2^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6 t^2 + \eta^2 - 4 \eta^4)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 = -S_1 \sin \alpha_0 t + \frac{S_1^2}{2} \ldots \quad + \frac{S_1^3}{6} \sin^3 \alpha_0 \ldots \quad - \frac{S_1^3}{6} \sin \alpha_0 \ldots \tag{7}$$

Hievon brauchen wir zunächst nur die Addition, d. h.:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \alpha_0 \text{ oder } \alpha - \alpha_0 = \frac{S_2 - S_1}{2} \sin \alpha_0 t + \frac{S_2^2 + S_1^2}{4} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2 + \eta^2) \tag{8}$$

Die Differenz $S_2 - S_1$ von (4) hier in (8) eingesetzt giebt:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{S^2}{8}\left(\frac{\sin^3 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2\,t^2 + \eta^2 + 3\,\eta^2 t^2)\right) \tag{9}$$

Damit werden die mehrfach gebrauchten $S \sin \alpha_0$ und $S \cos \alpha_0$:

$$S \sin \alpha_0 = S \sin \alpha - \frac{S^3}{8}\left(\sin^3 \alpha\, t^2 + \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 2\,t^2 + \eta^2 + 3\,\eta^2 t^2)\right) \tag{10}$$

$$S \cos \alpha_0 = S \cos \alpha + \frac{S^3}{8}\left(\frac{\sin^4 \alpha}{\cos \alpha} t^2 + \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + 2\,t^2 + \eta^2 + 3\,\eta^2 t^2)\right) \tag{11}$$

Wenn man dieses (11) in (5) einsetzt, wobei man in den Gliedern mit S^3 schlechthin α statt α_0 schreiben darf, so erhält man:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = S \cos \alpha \left\{1 + \frac{S^2}{24} \sin^2 \alpha (2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2) - \frac{S^2}{8} \cos^2 \alpha\, \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2)\right\} \tag{12}$$

Wir bilden nun auch die Subtraktion von (6) und (7):

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (S_2 + S_1) \sin \alpha_0\, t + \frac{S_2^2 - S_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2\,t^2 + \eta^2)$$

$$- \frac{S_2^3 + S_1^3}{6}\left(\sin^3 \alpha_0\, t (1 + 2\,t^2 + \eta^2) - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0\, t (5 + 6\,t^2 + \eta^2 - 4\,\eta^4)\right)$$

Hier ist wieder $S_2 - S_1$ nach (4) zu berücksichtigen; dieses giebt:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = S \sin \alpha_0\, t + \frac{S^3}{24} t \left(\sin^3 \alpha_0 (2 + 4\,t^2 + 2\,\eta^2)\right.$$

$$\left. + \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (5 + 6\,t^2 + 10\,\eta^2 + 18\,\eta^2 t^2 + 5\,\eta^4)\right)$$

und wenn man endlich noch $S \sin \alpha_0$ nach (10) einsetzt, wobei in den höheren Gliedern α_0 mit α schlechthin verwechselt werden darf, so erhält man:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = S \sin \alpha\, t \left\{1 + \frac{S^2}{24} \sin^2 \alpha (2 + t^2 + 2\,\eta^2) + \frac{S^2}{24} \cos^2 \alpha (2 + 7\,\eta^2 + 9\,\eta^2 t^2 + 5\eta^4)\right\} \tag{13}$$

Es bleibt nun noch die Formel für l zu entwickeln, wozu wir in zweifacher Anwendung von (26) § 74. S. 395 haben:

$$+ l_2 \cos \varphi = S_2 \sin \alpha_0 + S_2^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0\, t - \frac{S_2^3}{3}\left(\sin^3 \alpha_0\, t^2 - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3\,t^2 + \eta^2)\right) \tag{14}$$

$$- l_1 \cos \varphi = - S_1 \sin \alpha_0 + S_1^2 \ldots \quad + \frac{S_1^3}{3}\left(\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \right) \tag{15}$$

Die Differenz hievon giebt (da $l_2 + l_1 = l$, und $S_2 + S_1 = S$ ist):

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha_0 + (S_2^2 - S_1^2) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0\, t - \frac{S_2^3 + S_1^3}{3}\left(\sin^3 \alpha_0\, t^2 - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3\,t^2 + \eta^2)\right)$$

Hier ist wieder $S_2 - S_1$ nach (4) und $S \sin \alpha_0$ nach (10) zu berücksichtigen, wodurch man erhalten wird:

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha + \frac{S^3}{24} \sin \alpha \left\{\sin^2 \alpha\, t^2 - \cos^2 \alpha (1 + \eta^2 - 9\,\eta^2 t^2)\right\} \tag{16}$$

Wenn man von (14) und (15) auch die Summe bildet, so bekommt man eine Gleichung, welche jetzt nicht nötig ist, aber später noch nützlich sein wird, nämlich:

$$(l_2 - l_1) \cos \varphi = \frac{S^2}{4} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} t + \frac{S^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha\, t (2 + 3\,\eta^2) \tag{17}$$

Die Gleichungen (12), (13) und (16) enthalten die Lösung der gestellten Aufgabe; man kann jedoch durch Division von (13) und (16) auch noch eine vierte Gleichung bilden:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left\{1 + \frac{S^2}{24}\left(\sin^2 \alpha\,(2 + 2\,\eta^2) + \cos^2 \alpha\,(3 + 8\,\eta^2 + 5\,\eta^4)\right)\right\} \quad (18)$$

Dabei kann man auch in dem Gliede mit $\sin^2 \alpha$ schreiben:

$$2 + 2\,\eta^2 = 2\,(1 + \eta^2) = 2\,V^2 \quad (18\,\mathrm{a})$$

Die ersten Näherungen von (12) und (16) sind:

$$\frac{s}{N} \cos \alpha = S \cos \alpha = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{b}{V^2} \quad (19)$$

$$\frac{s}{N} \sin \alpha = S \sin \alpha = l \cos \varphi \quad (20)$$

Dabei soll b nur als Abkürzung für $\varphi_2 - \varphi_1$ dienen.

Damit lassen sich die Formeln (12), (16) und (18) so schreiben:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{s \cos \alpha}{N}\left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{24}(2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2) + \frac{b^2}{8\,V^4}\eta^2\,(t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)\right) \quad (21)$$

$$l \cos \varphi = \frac{s \sin \alpha}{N}\left(1 + \frac{l^2 \sin^2 \varphi}{24} - \frac{b^2}{24\,V^4}(1 + \eta^2) - 9\,\eta^2 t^2)\right) \quad (22)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{12}\,V^2 + \frac{b^2}{24\,V^4}(3 + 8\,\eta^2 + 5\,\eta^4)\right) \quad (23)$$

Nun wollen wir die Coëfficienten der gefundenen Formeln besonders bezeichnen und herausheben, und dabei auch die nötigen ϱ zusetzen. Zuerst nehmen wir für die Glieder erster Ordnung die schon zu anderen Zwecken mehrfach eingeführten Haupt-Coëfficienten:

$$\frac{\varrho}{N} = [2] \quad , \quad \frac{\varrho}{M} \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho}{N}\,V^2 = [1] \quad (24)$$

Es ist also wegen der Bedeutung von S wie bei (22)—(24) § 74. S. 394:

$$v = S \sin \alpha = [2]\,s \sin \alpha \quad , \quad u = S \cos \alpha = [1]\,s \cos \alpha \quad (25)$$

Zugleich wollen wir noch folgende weitere Coëfficienten festsetzen:

$$\left.\begin{aligned}
[3] &= \frac{\mu}{24\,\varrho^2} & [4] &= \frac{\mu}{24\,\varrho^2}\,\frac{1 + \eta^2 - 9\,\eta^2 t^2}{V^4} \\
[5] &= \frac{\mu}{24\,\varrho^2}(2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2) & [6] &= \frac{\mu}{8\,\varrho^2}\,\eta^2\,\frac{t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2}{V^4} \\
[7] &= \frac{\mu}{12\,\varrho^2}\,V^2 & [8] &= \frac{\mu}{24\,\varrho^2}\,\frac{3 + 8\,\eta^2 + 5\,\eta^4}{V^4}
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Dabei bedeutet μ den logarithmischen Modulus für Einheiten der 7ten Stelle $\log \mu = 6.637\,7843$, und wir können dazu auch gleich ausrechnen:

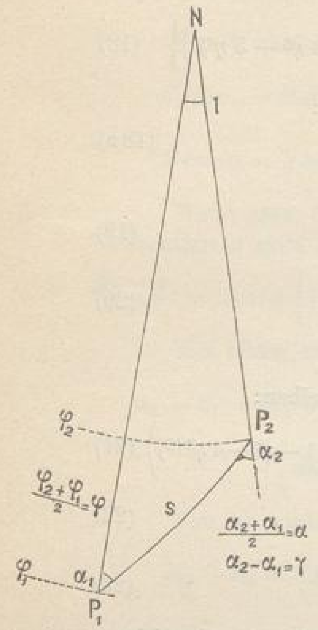
$$\log \frac{\mu}{8\,\varrho^2} = 5{\cdot}105\,8441 \quad , \quad \log \frac{\mu}{12\,\varrho^2} = 4{\cdot}929\,7528 \quad , \quad \log \frac{\mu}{24\,\varrho^2} = 4{\cdot}628\,7228 \quad (27)$$

Mit diesen Abkürzungen werden die Formeln (21)—(25) so dargestellt:

$$l = [2]\,\frac{s \sin \alpha}{\cos \varphi}\left(1 + \frac{[3]}{\mu}\,l^2 \sin^2 \alpha - \frac{[4]}{\mu}\,b^2\right) \quad (28)$$

Fortsetzung s. S. 408.

Fig. 2.



Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln.

Gegeben $\varphi_1 = 49^\circ\, 30'$ $\quad \varphi_2 = 50^\circ\, 30'$ $\quad l = 1^\circ\, 0'$

$\varphi = 50^\circ\, 0'\, 0''$ $\quad b = 1^\circ = 3600''$ $\quad l = 1^\circ = 3600''$

Gesucht sind s, α_1 und α_2.

Die Hilfstafeln des Anhangs geben mit $\varphi = 50^\circ\, 0'$:

Seite [32]: $log\,[1] = 8.510\,1335{\cdot}3$ $\quad log\,[2] = 8.508\,9295{\cdot}0$

Seite [54] giebt mit $\varphi = 50^\circ\, 0'$:

$log\,[3] = 4.6287$ $\quad log\,[4] = 4.6119$ $\quad log\,[5] = 5.4257$ $\quad log\,[6] = 2.151$

$log\,[7] = 4.9310$ $\quad log\,[8] = 5.1066$

Gebrauchsformeln.

$$log\, s\, sin\, \alpha = log\, \frac{l\, cos\, \varphi}{[2]} - [3]\, l^2\, sin^2\, \varphi + [4]\, b^2$$

$$log\, s\, cos\, \alpha = log\, \frac{\Delta\varphi}{[1]} - [5]\, l^2\, cos^2\, \varphi - [6]\, b^2$$

$$log\, \Delta\alpha = log\, l\, sin\, \varphi + [7]\, l^2\, cos^2\, \varphi + [8]\, b^2$$

Länge

$log\, l$	3.556 3025·0
$log\, cos\, \varphi$	9.808 0675·0
$log\, l\, cos\, \varphi$	3.364 3700·0
$log\, [2]$	8.508 9295·0
$log\, \frac{l\, cos\, \varphi}{[2]}$	4.855 4405·0
$log\, l^2\, cos^2\, \varphi$	6.7287

$l^2\, sin^2\, \varphi$	6.8811	b^2	7.1126
$-[3]$	4.6287$_n$	$+[4]$	4.6119
	1.5098$_n$		1.7245
	$-32{\cdot}35$		$+53{\cdot}02$

$\underbrace{-32{\cdot}35 \quad +53{\cdot}02}_{+20{\cdot}67}$

	4.855 4405·0
$s\, sin\, \alpha$	4.855 4425·7
$s\, cos\, \alpha$	5.046 1546·8
$tang\, \alpha$	9.809 2878·9

$\alpha = 32^\circ\, 48'\, 20{,}458''$

$\frac{\Delta\alpha}{2} = \quad 0^\circ\, 22'\, 58{,}947''$

$\alpha_2 = 33^\circ\, 11'\, 19{,}405''$

$\alpha_1 = 32^\circ\, 25'\, 21{,}511''$

Breite

$log\, b$	3.556 3025·0
$log\, [1]$	8 510 1335·3
$log\, \frac{b}{[1]}$	5.046 1689·7

$log\, b^2$	7.1126

$l^2\, cos^2\, \varphi$	6.7287	b^2	7.1126
$-[5]$	5.4257$_n$	$-[6]$	2.151$_n$
	2.1544$_n$		9.2636$_n$

$\underbrace{-142{\cdot}72 \quad -\quad 0{\cdot}18}_{-142{\cdot}90}$

	5.046 1689·7
$s\, cos\, \alpha$	5.046 1546·8

$s\, sin\, \alpha$	4.855 4425·7	$s\, cos\, \alpha$	5.046 1546·8
$sin\, \alpha$	9.733 8322·5	$cos\, \alpha$	9.924 5443·7
$log\, s$	5.121 6103·2	$log\, s$	5.121 6103·1

$s = 132\,315{,}38^m$

Azimut

$log\, l$	3.556 3025·0
$log\, sin\, \varphi$	9.884 2539·7
$log\, l\, sin\, \varphi$	3.440 5564·7

$log\, l^2\, sin^2\, \varphi$	6.8811

$l^2\, cos^2\, \varphi$	6.7287	b^2	7.1126
$+[7]$	4.9310	$+[8]$	5.1066
	1.6597		2.2192

$\underbrace{+45{\cdot}68 \quad +165{\cdot}67}_{+211{\cdot}35}$

3.440 5564·7

3.440 5776·0

$\Delta\alpha = 2757{,}8942''$

$\Delta\alpha = 0^\circ\, 45'\, 57{,}8942''$

$\frac{\Delta\alpha}{2} = 0^\circ\, 22'\, 58{,}9471''$

Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln

mit indirekter Auflösung.

Gegeben $\log s = 5{,}121\ 6103{\cdot}1$	$\varphi_1 = 49°\ 30'\ 0{,}0000''$	$\alpha_1 = 32°\ 25'\ 21{,}511''$
Genähert $l = 1°\ 0'\ 0{,}1''$	$\varphi_2 = 50°\ 30'\ 0{,}1''$	$\alpha_2 = 33°\ 11'\ 19{,}5''$
$= 3600{,}1''$	$\varphi\ = 50°\ 0'\ \ 0{,}05''$	$\alpha\ = 32°\ 48'\ 20{,}5055''$

Mit $\varphi = 50°\ 0'\ 0{,}0''$ geben die Hilfstafeln des Anhangs

Seite [32]: $\log [1] = 8.510\ 1335{\cdot}3$ $\log [2] = 8.508\ 9295{\cdot}0$

und die Hilfstafel Seite [54] giebt:

$\log[3] = 4.6287$ $\log[4] = 4.6119$ | $\log[5] = 5.4257$ $\log[6] = 2.151$ | $\log[7] = 4.9310$ $\log[8] = 5{,}1066$

Gebrauchsformeln.

$$\log l = \log\left(\frac{[2]\, s \sin\alpha}{\cos\varphi}\right) + [3]\, l^2 \sin^2\varphi - [4]\, b^2$$

$$\log \varDelta\varphi = \log\Big([1]\, s\cos\alpha\Big) + [5]\, l^2\cos^2\varphi + [6]\, b^2$$

$$\log\varDelta\alpha = \log\Big([2]\, s \sin\alpha \tan\varphi\Big) + [7]\, l^2\cos^2\varphi + [8]\, b^2 + [3]\, l^2 \sin^2\varphi - [4]\, b^2$$

Länge

$\log s$	5.121 6103·1
$\log [2]$	8.508 9295·0
$\log \sin\alpha$	9.733 8324·0
$[2]\, s \sin\alpha$	3.364 3722·1
$\log\cos\varphi$	9.808 0673·7
$\log (l)$	3·556 3048·4

$\log([2]\, s \sin\alpha)^2 = \log l^2 \cos^2\varphi = 6.7287$

$l^2 \sin^2\varphi$	6.8811	b^2	7.1126
$+[3]$	4.6287	$-[4]$	4.6119_n
	1.5088		1.7245_n

$$\underbrace{+32{\cdot}35 \quad -53{\cdot}02}_{-20{\cdot}67}$$

$\log (l)$	3.556 3048·4
	− 20.7
$\log l$	3.556 3027·7

$l = 3600{,}0022''$
soll 0,0000

Breite

$\log s$	5.121 6103·1
$\log [1]$	8.510 1335·3
$\log\cos\alpha$	9.924 5443·0
$[1]\, s\cos\alpha$ $= \log b$	3.556 2881·4

$\log b^2 = 7.1126$

$l^2\cos^2\varphi$	6.7287	b^2	7.1126
$+[5]$	5.4257	$+[6]$	2.151
	2.1544		9.264

$$\underbrace{+142{\cdot}72 \quad +0{\cdot}18}_{+142{\cdot}90}$$

$\log (b)$	3.556 2881·4
	+ 142·9
$\log\varDelta\varphi$	3.556 3024·3

$\varDelta\varphi = 3599{,}9994''$
soll 0,0000

Azimut

$\log s$	5.121 6103·1
$\log [2]$	8.508 9295·0
$\log\sin\alpha$	9.733 8324·0
$\log\tan\varphi$	0.076 1866·8
$\log(\varDelta\alpha)$	3.440 5588·9

$= \log l \sin\varphi$

$\log l^2 \sin^2\varphi = 6.8811$

$l^2\cos^2\varphi$	6.7287	b^2	7.1126
$+[7]$	4.9310	$+[8]$	5.1066
	1.6597		2.2192

$$\underbrace{+45{\cdot}68 \quad +165{\cdot}67}$$

$$\left.\begin{array}{r} +211{\cdot}35 \\ -\ 20{\cdot}67 \end{array}\right\} +190{\cdot}68$$

$\log(\varDelta\alpha)$	3.440 5588·9
	+ 190·7
$\log\varDelta\alpha$	3.440 5779·6

$\varDelta\alpha = 2757{,}896$
soll ,894

Fortsetzung von S. 405.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varDelta\,\varphi = [1]\, s \cos \alpha \left(1 + \frac{[5]}{\mu}\, l^2 \cos^2 \alpha + \frac{[6]}{\mu}\, b^2\right) \tag{29}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 - \varDelta\,\alpha = l \sin \varphi \left(1 + \frac{[7]}{\mu}\, l^2 \cos^2 \alpha + \frac{[8]}{\mu}\, b^2\right) \tag{30}$$

und $$\varDelta\,\alpha = [2]\, s \sin \alpha \tang \varphi \left(1 + \frac{[7]}{\mu}\, l^2 \cos^2 \alpha + \frac{[8]}{\mu}\, b^2 + \frac{[3]}{\mu}\, l^2 \sin^2 \alpha - \frac{[4]}{\mu}\, b^2\right) \tag{31}$$

Dazu auch die Umkehrungen:

$$s \sin \alpha = \frac{l \cos \varphi}{[2]} \left(1 - \frac{[3]}{\mu}\, l^2 \sin^2 \alpha + \frac{[4]}{\mu}\, b^2\right) \tag{32}$$

$$s \cos \alpha = \frac{\varDelta\,\varphi}{[1]} \left(1 - \frac{[5]}{\mu}\, l^2 \cos^2 \alpha - \frac{[6]}{\mu}\, b^2\right) \tag{33}$$

$$\varDelta\,\alpha = l \sin \varphi \left(1 + \frac{[7]}{\mu}\, l^2 \cos^2 \varphi + \frac{[8]}{\mu}\, b^2\right) \tag{34}$$

Daraus folgen die logarithmischen Gebrauchsformeln, wie sie in dem Zahlenbeispiel auf S. 406 und 407 obenan gestellt sind.

Umkehrung der Mittelbreiten-Formeln.

Wenn φ_1, α_1 und s gegeben und φ_2, α_2 und l gesucht sind, so kann man die Mittelbreiten-Formeln nicht unmittelbar anwenden, wohl aber mittelbar durch Einführung von Näherungs-Werten, wie schon am Schlusse von § 62. S. 353 bei den sphärischen Mittelbreiten-Formeln mit Gauss' eigenen Worten angegeben ist. Was die nötigen Näherungswerte betrifft, so kann man die Längen und Breiten schon aus dem Netzbilde der Triangulierung entnehmen und damit auch die Meridian-Konvergenzen $= \lambda \sin \varphi$ ebenso genau; wir wollen aber annehmen, man habe das ganze Netz vorläufig nach den Formeln dritter Ordnung von § 75. S. 398 durchgerechnet, was ungefähr von ähnlicher Bedeutung ist wie das vorläufige Durchrechnen einer Triangulierung für die Zwecke von Centrierungen, sphärischen Excessen u. dergl. Kurz, wir wollen annehmen, man habe Breiten, Längen und Azimute auf etwa 0,1″ genau und dann genügt eine oder höchstens zwei Durchrechnungen nach S. 407, um alles bis auf 0,0001″ zum Stimmen zu bringen.

Jedenfalls kann man alle Coëfficenten-Logarithmen *log* [1], *log* [2] u. s. w. sofort mit der vorläufigen Mittelbreite φ hinreichend endgiltig genau aus den Hilfstafeln von S. [30]—[35] und S. [52]—[54] entnehmen und damit die Rechnung von S. 407 durchführen.

Die Schlusswerte kommen auf S. 407 noch mit Fehlern innerhalb 0,001″ in Breite und Azimut heraus, welche durch eine abermalige Durchrechnung vollends getilgt werden müssen.

Es könnte hiernach scheinen, dass das Verfahren umständlich und mühsam sei, das ist aber nicht der Fall, denn die Wiederholung erstreckt sich nur auf die drei Logarithmen *log sin* α, *log cos* α, *log tang* φ; alles andere, namentlich die Korrektionen zweiter Ordnung bleiben stehen. Erst wenn Breite und Azimut stimmen, wird auch die Länge nachgeholt.

Das Beispiel S. 407 zeigt, dass man mit jeder Durchrechnung um etwa zwei Stellen weiter kommt, und dazu ist das Beispiel ein sehr grosses, mit $\varDelta\varphi$ und $l = 1°$ und $s = 132^{km}$; in der Praxis sind die Seiten viel kürzer und dann geht die Näherungs-Konvergenz auch noch viel rascher.

Die Entwicklung sphäroidischer Mittelbreiten-Formeln und ihrer Umkehrung bildet den Inhalt der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" von Gauss, zweite Abhandlung, Göttingen 1846. Gauss hat hier den ungemein nützlichen Grundsatz des Mittel-Arguments bei Reihen-Entwicklungen auf Geodäsie mit schönstem Erfolge angewendet, und eine zweifach unabhängige Begründung gegeben, erstens durch die konforme Flächen-Abbildung und zweitens durch unmittelbare Reihen-Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie.

Die von Gauss beigegebene Coëfficienten-Tabelle erstreckt sich aber nur von 51°—54° Breite. Eine Ausdehnung dieser Tabelle auf 45°—55° gaben wir in den früheren Auflagen dieses Buches, und eine Tafel der Gauss schen Coëfficienten-Logarithmen *log* (1), *log* (2) . . . *log* (6) in der ganzen Ausdehnung von $\varphi = 34°$ bis $\varphi = 70°$ wurde berechnet von *Biek*, und veröffentlicht in der russischen Übersetzung von Jordan, „Handbuch der Vermessungskunde" S. 652—665 (vgl. das genauere Citat S. 229).

Was im vorstehenden § 77. gegeben ist, beruht auf dem Gauss schen Gedanken, ist aber nach Entwicklung und Coëfficienten-Darstellung in andere Form gebracht, weil es uns schien, dass die Gauss sche Form der Korrektions-Glieder mit *drei* Elementen s, β und τ (τ = Meridian-Konvergenz) ohne λ, in mancher Beziehung nicht günstig ist.

§ 78. Weitere Formeln für Soldnersche Coordinaten.

Die Formeln von § 55. zur Berechnung von φ und λ aus Soldnerschen x und y und umgekehrt gehen nur bis zur dritten Ordnung, und sind auch bezüglich der sphäroidischen Zusätze mit η^2 u. s. w. unscharf; man bekommt genauere Formeln einfach dadurch, dass man in den Formeln (25)—(27) § 74. S. 395 das Ausgangs-Azimut $\alpha = 90°$ und die Entfernung $s = y$ setzt, also

$$v = \frac{s \sin \alpha}{N} = \frac{y}{N} \quad \text{und} \quad u = \frac{s \cos \alpha}{N} = 0 \tag{1}$$

Die in § 74. mit φ bezeichnete Ausgangs-Breite nimmt dann die Bedeutung der Fusspunktsbreite an und soll daher ebenso wie in § 55. nun mit φ_1 bezeichnet werden und die Breite des Punktes x, y, welche in § 74. mit φ' bezeichnet war, sei nun φ (vgl. Fig. 1. S. 410) und mit alledem geben die Formeln (25)—(27) von § 74 mit Ergänzung bis s^5 nun folgendes (ohne ϱ):

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V^2} = -\frac{y^2 t}{2 N^2} + \frac{y^4 t}{24 N^4}(1 + 3 t^2) \tag{2}$$

$$\lambda \cos \varphi_1 = \frac{y}{N} - \frac{y^3}{3 N^3} t^2 + \frac{y^5 t^2}{15 N^5}(1 + 3 t^2) \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{y}{N} t - \frac{y^3 t}{6 N^3}(1 + 2 t^2 + \eta^2) + \frac{y^5 t}{120 N^5}(1 + 20 t^2 + 24 t^4) \tag{4}$$

Dabei gehören V^2 und $N = c : V$ und $t = tang\, \varphi_1$ alle zur Fusspunktsbreite φ_1 entsprechend Fig. 1. S. 410. Diese Formeln sind bis y^4 nicht wesentlich anders als die früheren (7), (9), (11) § 55. S. 304. Bei φ ist noch ein Glied mit y^4 hinzugekommen und bei γ noch ein kleiner Zusatz η^2 und dann sind noch die Glieder 5ter Ordnung bei λ und γ dazu gekommen. Es sind also die früheren Formeln von § 55. mit ihrer elementaren sphäroidischen Herleitung von § 54. innerhalb ihres beabsichtigten Anwendungsbereiches genügend nachgewiesen.

In der „Bayerischen Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, 1873", S. 542—546 sind solche weitgehende Formeln wegen der grossen Ordinaten in Bayern (vgl. S. 327) angewendet.

Nach diesem wollen wir noch in anderem Sinne eine Weiterentwicklung zu Soldner schen Coordinaten geben, die wir schon früher in der „Zeitschr. f. Verm." 1894