Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 78. Weitere Formeln für Soldnersche Coordinaten

Die Entwicklung sphäroidischer Mittelbreiten-Formeln und ihrer Umkehrung bildet den Inhalt der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ von Gauss, zweite Abhandlung, Göttingen 1846. Gauss hat hier den ungemein nützlichen Grundsatz des Mittel-Arguments bei Reihen-Entwicklungen auf Geodäsie mit schönstem Erfolge angewendet, und eine zweifach unabhängige Begründung gegeben, erstens durch die konforme Flächen-Abbildung und zweitens durch unmittelbare Reihen-Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie.

Die von Gauss beigegebene Coëfficienten-Tabelle erstreckt sich aber nur von 51°—54° Breite. Eine Ausdehnung dieser Tabelle auf 45°—55° gaben wir in den früheren Auflagen dieses Buches, und eine Tafel der Gauss schen Coëfficienten-Logarithmen *log* (1), *log* (2) . . . *log* (6) in der ganzen Ausdehnung von $\varphi = 34°$ bis $\varphi = 70°$ wurde berechnet von *Biek*, und veröffentlicht in der russischen Übersetzung von Jordan, „Handbuch der Vermessungskunde“ S. 652—665 (vgl. das genauere Citat S. 229).

Was im vorstehenden § 77. gegeben ist, beruht auf dem Gauss schen Gedanken, ist aber nach Entwicklung und Coëfficienten-Darstellung in andere Form gebracht, weil es uns schien, dass die Gauss sche Form der Korrektions-Glieder mit *drei* Elementen s, β und τ (τ = Meridian-Konvergenz) ohne λ, in mancher Beziehung nicht günstig ist.

§ 78. Weitere Formeln für Soldner sche Coordinaten.

Die Formeln von § 55. zur Berechnung von φ und λ aus Soldner schen x und y und umgekehrt gehen nur bis zur dritten Ordnung, und sind auch bezüglich der sphäroidischen Zusätze mit η^2 u. s. w. unscharf; man bekommt genauere Formeln einfach dadurch, dass man in den Formeln (25)—(27) § 74. S. 395 das Ausgangs-Azimut $\alpha = 90°$ und die Entfernung $s = y$ setzt, also

$$v = \frac{s \sin \alpha}{N} = \frac{y}{N} \quad \text{und} \quad u = \frac{s \cos \alpha}{N} = 0 \tag{1}$$

Die in § 74. mit φ bezeichnete Ausgangs-Breite nimmt dann die Bedeutung der Fusspunktsbreite an und soll daher ebenso wie in § 55. nun mit φ_1 bezeichnet werden und die Breite des Punktes x, y, welche in § 74. mit φ' bezeichnet war, sei nun φ (vgl. Fig. 1. S. 410) und mit alledem geben die Formeln (25)—(27) von § 74 mit Ergänzung bis s^5 nun folgendes (ohne ϱ):

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V^2} = -\frac{y^2 t}{2 N^2} + \frac{y^4 t}{24 N^4}(1 + 3 t^2) \tag{2}$$

$$\lambda \cos \varphi_1 = \frac{y}{N} - \frac{y^3}{3 N^3} t^2 + \frac{y^5 t^2}{15 N^5}(1 + 3 t^2) \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{y}{N} t - \frac{y^3 t}{6 N^3}(1 + 2 t^2 + \eta^2) + \frac{y^5 t}{120 N^5}(1 + 20 t^2 + 24 t^4) \tag{4}$$

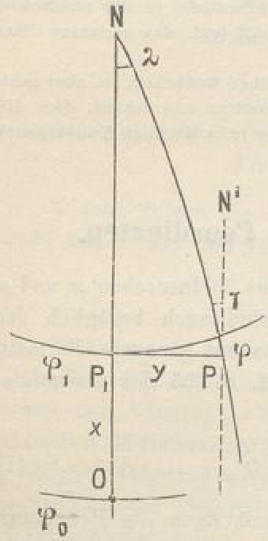
Dabei gehören V^2 und $N = c : V$ und $t = tang\, \varphi_1$ alle zur Fusspunktsbreite φ_1 entsprechend Fig. 1. S. 410. Diese Formeln sind bis y^4 nicht wesentlich anders als die früheren (7), (9), (11) § 55. S. 304. Bei φ ist noch ein Glied mit y^4 hinzugekommen und bei γ noch ein kleiner Zusatz η^2 und dann sind noch die Glieder 5 ter Ordnung bei λ und γ dazu gekommen. Es sind also die früheren Formeln von § 55. mit ihrer elementaren sphäroidischen Herleitung von § 54. innerhalb ihres beabsichtigten Anwendungsbereiches genügend nachgewiesen.

In der „Bayerischen Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, 1873“, S. 542—546 sind solche weitgehende Formeln wegen der grossen Ordinaten in Bayern (vgl. S. 327) angewendet.

Nach diesem wollen wir noch in anderem Sinne eine Weiterentwicklung zu Soldner schen Coordinaten geben, die wir schon früher in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894

S. 33—42 und 147—152 behandelt haben, nämlich Aufstellung von Formeln, welche φ, λ und γ lediglich als Funktion der Veränderlichen x und y geben, indem die Ursprungsbreite φ_0 des Systems als Konstante in alle Coëfficienten eingeht. Bei nur einigermassen grossen Abscissen x wird diese Form nicht unmittelbar nützlich sein, aber z. B. bei den kleinen Geltungsbereichen der preussischen 40 Katastersysteme können die neuen Formeln neben andern mit Vorteil gebraucht werden.

Fig. 1.



Unter Annahme der Bezeichnungen zur nebenstehenden Fig. 1. wollen wir die allgemeinen Formeln (25)—(27) § 74. S. 395 auf den Fall von Fig. 1. zweifach anwenden, nämlich erstens zum Übergang von P_0 auf P_1 mit $\alpha = 0$ und $s = x$ und zweitens zum Übergang von P_1 auf P mit $\alpha = 90°$ und $s = y$.

Der erste Übergang giebt, mit Weglassung der ϱ aus (25), S. 395, indem wir zugleich $\varphi_1 - \varphi_0 = \delta$ setzen:

$$\frac{\delta}{V_0^2} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{V_0^2} = \frac{x}{N_0} - \frac{3}{2}\frac{x^2}{N_0^2}\eta_0^2\, t_0 + \frac{x^3}{2\,N_0^3}\eta_0^2\,(t_0^2 - 1) \qquad (5)$$

dabei sollen V_0, N_0, η_0, t_0 sich sämtlich auf die Nullbreite φ_0 beziehen. Bei x^3 in (5) ist η_0^4 vernachlässigt.

Die beiden anderen Formeln (26) und (27) S. 395 geben mit $\alpha = 0$ nur $\lambda = 0$ und $\alpha' - \alpha = 0$, d. h. nichts neues; dagegen giebt die zweite Anwendung, mit $\alpha = 90°$ und $s = y$, zum Übergang von P_1 auf P aus den drei Grundgleichungen (25)—(27) S. 395 (mit Weglassung der ϱ):

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_1^2} = -\frac{y^2}{2\,N_1^2}\,t_1 + \frac{y_4}{24\,N_1^4}\,t_1\,(1 + 3\,t_1^2) \qquad (6)$$

$$\lambda \cos\varphi_1 = \frac{y}{N_1} - \frac{y^3}{3\,N_1^3}\,t_1^2 \qquad (7)$$

$$\gamma = \frac{y}{N_1}\,t_1 - \frac{y^3}{6\,N_1^3}\,t_1\,(1 + 2\,t_1^2 + \eta_1^2) \qquad (8)$$

Hier ist überall φ_1 auf φ_0 zu reduzieren, wozu die Beziehung (5) dient, indem damit z. B. $t_1 = \operatorname{tang}\varphi_1$ entwickelt werden muss.

Indem wir dieses thun und $\operatorname{tang}\varphi_0$ kurz mit t_0 bezeichnen, auch $\varphi_1 - \varphi_0 = \delta$ setzen, wie schon bei (5), haben wir goniometrisch nach § 28. S. 167:

$$t_1 = t_0\left(1 + \frac{\delta}{t_0}(1 + t_0^2) + \delta^2\,(1 + t_0^2)\right) \qquad (9)$$

dieses genügt, während wir $\cos\varphi_1$ bis zur dritten Ordnung brauchen:

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_0\left(1 - \delta\,t_0 - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{6}\,t_0\right)$$

und die Umkehrung, wie auch schon auf S. 167 angegeben:

$$\frac{1}{\cos\varphi_1} = \frac{1}{\cos\varphi_0}\left(1 + \delta\,t_0 + \frac{\delta^2}{2}\,(1 + 2\,t_0^2) + \frac{\delta^3}{6}\,t_0\,(5 + 6\,t_0^2)\right) \qquad (10)$$

Um auch V zu entwickeln, welches als Bestandteil von $N = c : V$ mehrfach vorkommt, brauchen wir die schon in § 34. S. 208 unten bei (i) gemachte Vorbereitung, wieder mit $\varphi_1 - \varphi_0 = \delta$:

$$\frac{V_1}{V_0} = 1 - \frac{\delta\,\eta_0^2\,t_0}{V_0^2} - \frac{\delta^2}{2}\frac{\eta_0^2}{V_0^4}\,(1 - t_0^2 + \eta_0^2) \qquad (11)$$

Nun sind wir genügend vorbereitet, um die Formel (6) zu behandeln, und wir bemerken zuerst, dass das letzte Glied derselben, weil von 4. Ordnung, schlechthin mit N_0 statt N_1 und t_0 statt t_1 geschrieben werden kann, und der Anfang von (6) gestaltet sich so:

$$\frac{\varphi-\varphi_1}{V_0^2}\frac{V_0^2}{V_1^2} = -\frac{y^2}{2\,N_0^2}\,t_0\,\frac{N_0^2}{N_1^2}\frac{t_1}{t_0} + \frac{y^4}{24\,N_0^4}\,t_0\,(1+3\,t_0^2)$$

Da aber $N_0 = c:V_0$ und $N_1 = c:V_1$ ist, hat man, mit Näherung im zweiten Gliede:

$$\frac{\varphi-\varphi_1}{V_0^2} = -\frac{y^2}{2\,N_0^2}\,t_0\,\frac{V_1^4}{V_0^4}\frac{t_1}{t_0} + \frac{y^4}{24\,N_0^4}\,t_0\,(1+3\,t_0^2) \tag{12}$$

hier ist nach (11) und (9) hinreichend genau:

$$\frac{V_1^4\,t_1}{V_0^2\,t_0} = \left(1-4\,\delta\,\frac{\eta_0^2\,t_0}{V_0^2} - \delta^2\,\eta_0^2\ldots\right)\left(1+\frac{\delta}{t_0}\,(1+t_0^2)+\delta^2\,(1+t_0^2)\right)$$
$$= 1+\frac{\delta}{V_0^2\,t_0}\left(1+t_0^2+\eta_0^2-3\,\eta_0^2\,t_0^2\right)+\delta^2\,(1+t_0^2)$$

und mit Einsetzung aus (5):

$$\frac{V_1^4\,t_1}{V_0^4\,t_0} = 1+\frac{x}{N_0\,t_0}\,(1+t_0^2+\eta_0^2-3\,\eta_0^2\,t_0^2)+\frac{x^2}{N_0^2}\,(1+t_0^2) \tag{13}$$

Dieses (13) in (12) gesetzt giebt:

$$\frac{\varphi-\varphi_1}{V_0^2} = -\frac{y^2}{2\,N_0^2}t_0 - \frac{y^2\,x}{2\,N_0^3}(1+t_0^2+\eta_0^2-3\,\eta_0^2\,t_0^2) - \frac{y^2\,x^2}{2\,N_0^4}t_0\,(1+t_0^2) + \frac{y^4}{24\,N_0^4}t_0(1+3\,t_0^2) \tag{14}$$

Nun kann man aus (14) und (5) den gesuchten Breitenunterschied zusammensetzen, wobei wir aber zur Abkürzung nur noch N statt N_0, t statt t_0 u. s. w. schreiben wollen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi-\varphi_0}{V^2} &= \frac{x}{N}-\frac{y^2}{2\,N^2}t-\frac{3}{2}\frac{x^2}{N^2}\eta^2\,t-\frac{y^2\,x}{2\,N^3}(1+t^2+\eta^2-3\,\eta^2\,t^2)\\ &+\frac{x^3}{2\,N^3}\eta^2\,(t^2-1)-\frac{y^2\,x^2}{2\,N^4}\,t\,(1+t^2)+\frac{y^4}{24\,N^4}\,t\,(1+3\,t^2)\end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

da $V^2 = N:M$ und $M\,N = r^2$ ist, kann man das auch so schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\varphi = \varphi-\varphi_0 &= \frac{x}{M}-\frac{y^2}{2\,r^2}t-\frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}\eta^2\,t-\frac{y^2\,x}{2\,r^2\,N}(1+t^2+\eta^2-3\,\eta^2\,t^2)\\ &+\frac{x^3}{2\,r^2\,N}\eta^2\,(t^2-1)-\frac{y^2\,x^2}{2\,N^2\,r^2}\,t\,(1+t^2)+\frac{y^4}{24\,N^2\,r^2}\,t\,(1+3\,t^2)\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Dieses ist die Schlussformel für $\varphi-\varphi_0$, für welche wir insofern eine Probe haben, als mit $y=0$ die frühere Formel (29) von § 74. S. 397 wieder erscheinen muss. Dieses ist hinreichend der Fall, wie man am besten in (14a) sieht, indem nur das Glied mit $x^3\,\eta^2\,(t^2-1)$ von dem Gliede mit $m^3\,\eta^2$ in (29) § 74. S. 397 in höheren Gliedern mit η^2 in der Klammer abweicht, was schon bei (5) S. 410 bemerkt wurde.

Auf ähnlichem Wege wie (15) erhalten wurde, haben wir nun auch (7) zu behandeln:

$$\lambda = \frac{y}{N_1\cos\varphi_1}-\frac{y^3}{3\,N_1^3}\frac{t_1^2}{\cos\varphi_1}$$

$$\lambda = \frac{y}{N_0\cos\varphi_0}\frac{V_1}{V_0}\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1}-\frac{y^3}{3\,N_1^3}\frac{t_1^2}{\cos\varphi_1} \tag{16}$$

Hierbei ist nach (10) und (11), indem man beide Reihen zusammen multipliziert, und wie bei (14a) und (15) nur noch t statt t_0 u. s. w. schreibt:

$$\frac{V_1}{V_0}\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1} = 1 + \frac{\delta}{V^2}t + \frac{\delta^2}{2\,V^4}(1 + 2\,t^2 + \eta^2 + 3\,\eta^2 t^2) + \frac{\delta^3}{6\,V^6}t\,(5 + 6\,t^2) \qquad (17)$$

Das letzte Glied von (16) giebt bei der Reduktion auf φ_0 zwei Glieder, nämlich wegen (9) und (10), mit Weglassung des unteren Zeigers $_0$:

$$\frac{y^3}{3\,N_1^3}\frac{t_1^2}{\cos\varphi_1} = \frac{y^3}{3\,N^3}\frac{t^2}{\cos\varphi}\left(1 + \frac{2\,\delta}{t}(1+t^2)\right)\left(1 + \delta\,t\right)$$

$$= \frac{y^3}{3\,N^3}\frac{t^2}{\cos\varphi} + \frac{y^3\,t\,\delta}{3\,N^3}(2 + 3\,t^2) \qquad (18)$$

Nun muss man (17) und (18) in (16) einsetzen, und zugleich nach (5) berücksichtigen:

$$\frac{\delta}{V^2} = \frac{x}{N} - \frac{3}{2}\frac{x^3}{N^2}\eta^2 t, \qquad \frac{\delta^2}{V^4} = \frac{x^2}{N^3} - \frac{3\,x^3}{N^3}\eta^2 t \qquad (19)$$

Thut man dieses alles, so wird man aus (16)—(19) erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{y}{N\cos\varphi} + \dfrac{y\,x\,t}{N^2\cos\varphi} + \dfrac{y\,x^2}{2\,N^3\cos\varphi}(1 + 2\,t^2 + \eta^2) \\ \quad - \dfrac{y^3}{3\,N^3}\dfrac{t^2}{\cos\varphi} + \dfrac{y\,x^3\,t}{6\,N^4\cos\varphi}(5 + 6\,t^2) - \dfrac{y^3\,x\,t}{3\,N^4\cos\varphi}(2 + 3\,t^2) \end{array}\right\} \qquad (20)$$

Um auch noch die Meridian-Konvergenz nach (8) zu entwickeln, haben wir (6) zunächst mit Absonderung von t_0 und N_0:

$$\gamma = \frac{y}{N_0}t_0\frac{V_1}{V_0}\frac{t_1}{t_0} - \frac{y^3}{6\,N_1^3}t_1(1 + 2\,t_1^2 + \eta_1^2) \qquad (21)$$

Hier wollen wir nur bis zur dritten Ordnung gehen, weil die Meridian-Konvergenz nicht so scharf erforderlich ist wie die Breite und Länge; also nach (9) und (11) durch Ausmultiplizieren:

$$\frac{V_1}{V_0}\frac{t_1}{t_0} = 1 + \frac{\delta}{V^2 t}(1 + t^2 + \eta^2) + \frac{\delta^2}{V^4}(1 + t^2) \qquad (22)$$

Hier ist wieder δ nach (19) einzusetzen, wodurch man (21) und (22) bis zur dritten Ordnung genügend erhält (mit Weglassung der Zeiger $_0$):

$$\gamma = \frac{y}{N}t + \frac{y\,x}{N^2}(1 + t^2 + \eta^2) + \frac{y\,x^2}{N^3}(1 + t^2) - \frac{y^3}{6\,N^3}t\,(1 + 2\,t^2) \qquad (23)$$

Nun haben wir in (15), (20), (23) die Lösung unserer Aufgabe, nämlich $\varphi - \varphi_0$, λ und γ als konvergierende Reihen nach Potenzen von x und y darzustellen. Es ist nur noch zu bemerken, dass in den Formeln (15), (20), (23) überall der für analytische Entwicklung weggelassene Faktor ϱ zur numerischen Anwendung zugesetzt werden muss, also z. B. in (23) $\gamma = \frac{y}{N}\varrho\,t + \frac{y\,x}{N^2}\varrho\,(1 + t^2 + \eta^2)$ u. s. w.

Wir wollen nun unsere Formeln (15), (20), (23) anwenden auf den Fall des Coordinaten-Systems Celle, für welches wir haben:

$$\varphi_0 = 52^\circ\,37'\,32{,}6709'' \quad , \quad \tang\varphi_0 = t$$

$$\left.\begin{array}{r|r|r} \log\sin\varphi_0 = 9.900\,1963{\cdot}4 & \log\cos\varphi_0 = 9.783\,2021{\cdot}9 & \log t = 0.116\,9941{\cdot}5 \\ \log V^2 = 0.001\,0739{\cdot}2 & \log\cos^2\varphi_0 = 9.566\,4043{\cdot}8 & \log t^2 = 0.233\,9883{\cdot}0 \\ \log M = 6.804\,4867{\cdot}7 & \log N = 6.805\,5606{\cdot}9 & \log r = 6.805\,0237{\cdot}3 \\ \log\eta^2 = 7.393\,7231{\cdot}6 & \log\eta^2 t^2 = 7.627\,7114{\cdot}6 & \log r^2 = 13.610\,0474{\cdot}6 \\ \eta^2 = 0{,}002\,4758{\cdot}43 & \eta^2 t^2 = 0{,}004\,243341 & t^2 = 1{,}7139111588 \\ \log\varrho = 5.314\,4251{\cdot}3 & \log\frac{\varrho}{M} = 8.509\,9383{\cdot}6 & \log\frac{\varrho}{N} = 8.508\,8644{\cdot}5 \\ & = \log[1] & = \log[2] \end{array}\right\} \quad (24)$$

Wenn man damit alle Coëfficienten von [15], [20], [23] ausrechnet, überall das nötige ϱ zusetzt, welches in [1] und [2] enthalten ist, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi - \varphi_0 = [8.509\,9383{\cdot}6]x - [1.520\,3418]\,y^2 - [9.391\,186]\,x^2 \\ - [5.029\,738]\,x\,y^2 + [1.845\,154]\,x^3 - [8.34389]\,x^2\,y^2 + [7.61833]\,y^4 \end{array}\right\} \quad (25)$$

$$\left.\begin{array}{c} \lambda = [8.725\,6622{\cdot}6]\,y + [2.037\,0957]\,y\,x + [5.459\,944]\,y\,x^2 \\ - [4.871\,408]\,y^3 + [8.83204]\,y\,x^3 - [8.80266]\,y^3\,x \end{array}\right\} \quad (26)$$

$$\left.\begin{array}{c} \gamma = [8.625\,8586{\cdot}0]\,y + [2.137\,2921]\,y\,x + [5.44\,8333]\,y\,x^2 \\ - [4.882\,776]\,y^3 \end{array}\right\} \quad (27)$$

Die Formeln (15), (20), (23) müssen auch umgekehrt werden, d. h. es muss x, y und γ auch als Funktion von φ und λ dargestellt werden.

Aus (19) § 55. S. 305 haben wir, da $[2] = \varrho : N$ u. s. w. ist:

$$y = \lambda\,N_1 \cos\varphi_1 + \frac{\lambda^3}{3} N_1 \sin^2\varphi_1 \cos\varphi_1 \quad (28)$$

Dieses in (6) eingesetzt liefert:

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_1^2} = -\frac{\lambda^2}{2} \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 + \frac{\lambda^4}{24} \sin\varphi_1 \cos^3\varphi_1 (1 - 5\,t^2) \quad (29)$$

Von (20) und (22) § 55. S. 305 haben wir:

$$y = \lambda\,N \cos\varphi - \frac{\lambda^3}{6} N \sin^2\varphi \cos\varphi \quad (30)$$

und

$$\gamma = \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin\varphi \cos^2\varphi \quad (31)$$

Um auch (29) auf φ statt φ_1 zu bringen, hat man in erster Näherung:

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\lambda^2}{2} V^2 \sin\varphi \cos^2\varphi$$

und damit weiter aus (29):

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{V^2} = \frac{\lambda^2}{2} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{\lambda^4}{24} \sin\varphi \cos^3\varphi\,(5 - t^2) \quad (32)$$

Der Übergang von φ_1 auf φ_0 ist schon früher in (13) § 35. S. 218 gemacht, nämlich:

$$x = M(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{3}{2}\frac{M}{V^2}\eta^2 t\,(\varphi_1 - \varphi_0)^2 + \frac{M}{2\,V^4}\eta^2(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2)(\varphi_1 - \varphi_0)^3 \quad (33)$$

Dabei ist $\varphi_1 - \varphi_0 = (\varphi - \varphi_0) - (\varphi - \varphi_1)$. Das letzte Glied in (33) enthält auch alle Glieder mit η^2, welche bei der entsprechenden Formel (15) nicht mehr genommen sind.

Nun hat man nur noch φ durch φ_0 zu ersetzen, d. h. indem $\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi$ gesetzt wird, nach S. 166:

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) = \sin\varphi_0 + \Delta\varphi\cos\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi^2}{2}\sin\varphi_0$$

$$\cos\varphi = \cos\varphi_0 - \Delta\varphi\sin\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi^2}{2}\cos\varphi_0$$

Wenn man dieses in (30)—(32) einsetzt und auch im übrigen den genügend angegebenen Gang einhält, so wird man finden:

$$\left.\begin{aligned} x = M\,\Delta\varphi + \frac{1}{2}N\sin\varphi\cos\varphi\,\lambda^2 + \frac{3}{2}\frac{M\eta^2 t}{V^2}\Delta\varphi^2 \\ + \frac{1}{2}M\cos^2\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2)\,\lambda^2\Delta\varphi \\ + \frac{1}{2}M\frac{\eta^2}{V^4}(1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2)\,\Delta\varphi^3 - N\sin\varphi\cos\varphi\,\lambda^2\Delta\varphi^2 \\ + \frac{1}{24}N\sin\varphi\cos^3\varphi\,(5 - t^2)\,\lambda^4 \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} y = N\cos\varphi\,\lambda - M\sin\varphi\,\lambda\,\Delta\varphi - \frac{M\cos\varphi}{2\,V^2}(1 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2)\,\lambda\,\Delta\varphi^2 \\ - \frac{1}{6}N\sin^2\varphi\cos\varphi\,\lambda^3 - \frac{1}{6}N\sin\varphi\cos^2\varphi\,(2 - t^2)\,\lambda^3\Delta\varphi \\ + \frac{1}{6}M\sin\varphi\,\lambda\,\Delta\varphi^3 \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

$$\gamma = \lambda\sin\varphi + \lambda\frac{\Delta\varphi}{\varrho}\cos\varphi - \frac{\lambda\,\Delta\varphi^2}{2\,\varrho^2}\sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3\,\varrho^2}\sin\varphi\cos^2\varphi \quad (36)$$

Auch die Einsetzung der Konstanten von Celle nach (24) lässt sich ausführen und giebt:

$$\left.\begin{aligned} x = [1.4900616{\cdot}4]\,\Delta\varphi + [5.5590789]\,\lambda^2 + [3.8613711]\,\Delta\varphi^2 \\ - [9.978721]\,\Delta\varphi\,\lambda^2 - [7.793405]\,\Delta\varphi^3 \\ - [5.23126]\,\Delta\varphi^2\lambda^2 + [3.93411]\,\lambda^4 \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

$$\left.\begin{aligned} y = [1.2743377{\cdot}4]\,\lambda - [6.0758328]\,\Delta\varphi\,\lambda - [0.3488631]\,\Delta\varphi^2\lambda \\ - [9.667729]\,\lambda^3 \\ - [3.69281]\,\Delta\varphi\,\lambda^3 + [4.66883]\,\Delta\varphi^3\lambda \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

$$\gamma = [9.9001963{\cdot}4]\,\lambda + [4.468\,777]\,\lambda\,\Delta\varphi - [8.97032]\,\lambda\,\Delta\varphi^2 + [8.36063]\,\lambda^3 \quad (39)$$

Zwei Zahlenbeispiele und noch verschiedene weitere Einzelheiten hiezu sind in der „Zeitschr. f. Verm." 1894, S. 40—41 und S. 150—153 gegeben, wovon hier abgesehen wird.

Über die ganze Anordnung dieser Auflösungsform, welche schon etwa 1820 von Schleiermacher in Hessen angewendet wurde („Zeitschr. f. Verm." 1884, S. 421—434) ist im allgemeinen zu sagen, dass sie im Vergleich mit der Bohnenberger schen Form von § 55. S. 308—309 kaum eine Rechenersparung bringt, und zur allgemeinen Anwendung noch Hilfstafeln für die Hauptglieder erster Ordnung und noch manches andere verlangen würde.

Trotzdem haben wir das Verfahren in unserem System Celle mit Vorliebe angewendet. Wir haben nach den Formeln (25)—(27) und (37)—(39) autographierte Schemata angelegt, in welchen alle konstanten Coëfficienten mit vorgedruckt sind, so dass man nur noch eine Logarithmentafel braucht, um einen Fall auszurechnen; dazu hat man die durchschlagende Probe, dass Hin- und Her-Rechnung stimmen muss. So sind z. B. auch die meisten der in § 58. erwähnten Rechnungen dieser Art gemacht.

Gerade die Unabhängigkeit von allen tabellarischen und litterarischen Hilfsmitteln sichert dem Verfahren Beliebtheit in Fällen, wo man nicht viele Punkte auf *ein*mal, aber immer wieder dann und wann den einen und anderen Fall, vorzunehmen hat.

Es ist auch noch ein Umstand zu erwähnen, betreffend die Nullpunktsbreiten φ_0, welche zur Zeit meist unrunde Zahlen sind, so dass man z. B. in Preussen die Coëfficienten für alle 40 Systeme einzeln ausrechnen müsste, während für runde Zahlen $\varphi_0 = 52^0\,0'$, $\varphi_0 = 52^\circ\,30'$ u. s. w. die Sache besser würde.

Näherungsformeln für Coordinaten-Differenzen.

Wenn man auf beschränktem Gebiete nur zunächst von *einem* Punkte sowohl die rechtwinkligen Coordinaten x, y, als auch die geographischen Coordinaten φ, λ kennt, so kann man für benachbarte Punkte die Differenzen $\varDelta x$, $\varDelta y$ einerseits und $\varDelta\varphi$, $\varDelta\lambda$ andererseits durch Näherungsformeln aus einander ableiten.

Wir nehmen hierzu die Formeln (8^x) und (10^x) § 55. S. 305:

$$\varphi = \varphi_0 + [1]\,x - \frac{([2]\,y)^2}{2\,\varrho}\,V^2\,tang\,\varphi \tag{a}$$

$$\lambda = \frac{[2]\,y}{cos\,\varphi} + \left(\frac{[2]\,y}{cos\,\varphi}\right)^3 \frac{1}{6\,\varrho^2}\,sin^2\,\varphi \tag{b}$$

Diese Formeln hat man zu differentiieren, man erhält also aus (a):

$$\varDelta\,\varphi = [1]\,\varDelta\,x - \frac{[2]^2}{\varrho}\,y\,V^2\,tang\,\varphi\,\varDelta\,y + \ldots \tag{c}$$

In der zweiten Formel (b) können wir in erster Näherung das zweite Glied weglassen, und im ersten Gliede von (*b*) setzen wir

$$\varphi = \varphi_c + [1]\,\varDelta\,x$$

d. h. wir zählen von einer konstanten Breite φ_c, welche einem Zentralpunkte entspricht.

Damit wird $cos\,\varphi = cos\,\varphi_c - [1]\,\varDelta\,x\,sin\,\varphi_c = cos\,\varphi_c\left(1 - [1]\,\frac{\varDelta\,x}{\varrho}\,tang\,\varphi_c\right)$

also

$$\lambda = \frac{[2]\,y}{cos\,\varphi_c}\left(1 + \frac{[1]\,\varDelta\,x}{\varrho}\,tang\,\varphi_c\right)$$

$$\varDelta\,\lambda = \frac{[2]}{cos\,\varphi_c}\,\varDelta\,y - \frac{[2]\,[1]\,y}{\varrho\,cos\,\varphi_c}\,tang\,\varphi_c\,\varDelta\,x + \ldots \tag{d}$$

In (c) und (d) haben wir die gesuchten Beziehungen zwischen $\varDelta\,\varphi$, $\varDelta\,\lambda$ einerseits und $\varDelta\,x$, $\varDelta\,y$ andererseits. Diese Beziehungen sind nur roh genähert, indem schon die Glieder mit $\varDelta\,x^2$ und $\varDelta\,y^2$ weggelassen sind.

Zur praktischen Anwendung wird man die Konstanten [1], [2], y, φ_c (und $\varphi_1 = \varphi_c$) einem Zentralpunkte entsprechend wählen, von welchem aus man nachher die $\varDelta\,\varphi$, $\varDelta\,\lambda$, $\varDelta\,x$, $\varDelta\,y$ zu rechnen beabsichtigt.

Wir haben dieses Verfahren 1891 mehrfach angewendet, als viele Punkte der Stadt Hannover für die Landesaufnahme nach φ und λ zu berechnen waren, d. h. wir haben die Formeln (c) und (d) lediglich zu summarischer Kontrolle neben anderen strengeren Formeln benützt.

I. *Aegidius* als Zentralpunkt hat

$$\lambda = 27^\circ\,24'\,24{,}6290'' \qquad \varphi_c = 52^\circ\,22'\,14{,}961''$$

$$y = -\,23271{,}81^m \qquad x = -\,28308{,}40^m$$

$$\varDelta\,\lambda = [8.723\,156]\,\varDelta\,y - [6.39851]\,\varDelta\,x \quad , \quad \varDelta\,\varphi = [6.1842]\,\varDelta\,y + [8.509\,948]\,\varDelta\,x$$

II. *Hochschule* als Zentralpunkt.

$$\lambda = 27^\circ\, 23'\, 8{,}233'' \qquad \varphi_c = 52^\circ\, 23'\, 1{,}328''$$
$$y = -\,24709\;77^m \qquad x = -\,26868{,}28^m$$
$$\varDelta\lambda = [8.723\,277]\,\varDelta y - [6.42\,486]\,\varDelta x \quad , \quad \varDelta\varphi = [6.2105]\,\varDelta y + [8.509\,947]\,\varDelta x$$

III. *Dreifaltigkeit* als Zentralpunkt.

$$\lambda = 27^\circ\, 25'\, 15{,}744'' \qquad \varphi_c = 52^\circ\, 22'\, 59{,}973''$$
$$y = -\,22298{,}58^m \qquad x = -\,26921{,}72^m$$
$$\varDelta\lambda = [8.723\,273]\,\varDelta y - [6.38076]\,\varDelta x \quad , \quad \varDelta\varphi = [6.1659]\,\varDelta y + [8.509\,947]\,\varDelta x$$

Nehmen wir z. B. Welfenkaserne mit $y = -\,23180{,}99_m$ und $x = -\,26485{,}30_m$ und rechnen nach II und nach III, so finden wir

II von Hochschule aus: $\lambda = 27^\circ\, 24'\, 28{,}971''$ $\quad \varphi = 52^\circ\, 23'\, 13{,}970''$

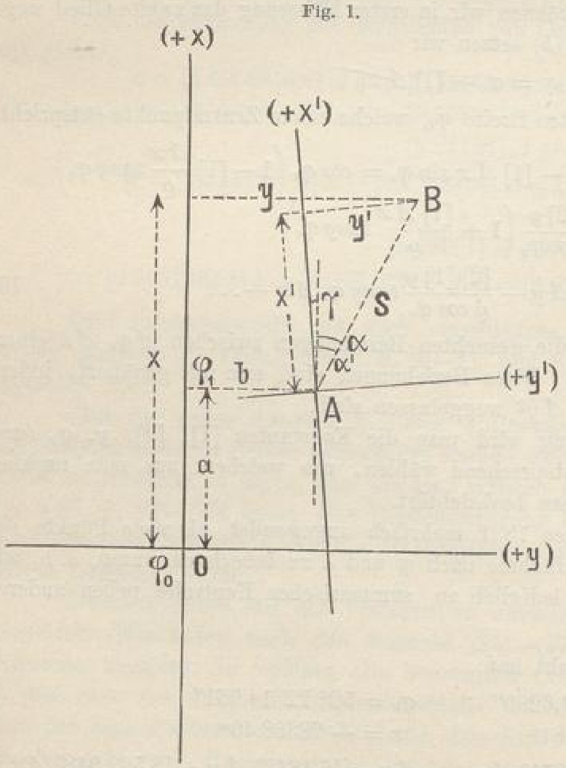
III von Dreifaltigkeit aus: $27^\circ\, 24'\, 28{,}981''$ $\quad 52^\circ\, 23'\, 13{,}965''$

Jedenfalls genügt das Verfahren, wenn man rasch einen Punkt von Hannover nur etwa auf 0,1″ für Topographie, Vergleichung mit astronomischer Bestimmung u. s. w. haben will, was manchmal vorkommt.

§ 79. Coordinaten-Umformung.

An den Grenzen zweier Coordinaten-Gebiete wird es oft vorkommen, dass man die Coordinaten des einen Systems in die des anderen Systems umzurechnen wünscht.

Fig. 1.



Ohne irgend welche neue Formeln zu entwickeln, kann man Coordinaten verschiedener rechtwinkliger Systeme auf dem Ellipsoid dadurch in einander umformen, dass man den Umweg über geographische Coordinaten (geographische Breiten und Längen) nimmt.

Es sei z. B. in nebenstehender Fig. 1. der Ursprung O eines rechtwinkligen Systemes mit $+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten und ein Punkt A habe in diesem System die Coordinaten a und b. Dieser Punkt A wird zum Ursprunge eines Systemes gemacht, dessen $+x'$-Axe im Meridian von A nach Norden liegt und die Meridian-Konvergenz γ in A gegen den ersten Ursprung O bildet. Irgend ein anderer Punkt B habe im ersten Systeme die Coordinaten x, y und im zweiten Systeme die Coordinaten $x'\, y'$.