Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 79. Coordinaten-Umformung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

II. *Hochschule* als Zentralpunkt.

$$\lambda = 27^\circ\,23'\,8{,}233'' \qquad \varphi_c = 52^\circ\,23'\,1{,}328''$$
$$y = -24709\,77^m \qquad x = -26868{,}28^m$$
$$\Delta\lambda = [8.723\,277]\,\Delta y - [6.42\,486]\,\Delta x \quad , \quad \Delta\varphi = [6.2105]\,\Delta y + [8.509\,947]\,\Delta x$$

III. *Dreifaltigkeit* als Zentralpunkt.

$$\lambda = 27^\circ\,25'\,15{,}744'' \qquad \varphi_c = 52^\circ\,22'\,59{,}973''$$
$$y = -22298{,}58^m \qquad x = -26921{,}72^m$$
$$\Delta\lambda = [8.723\,273]\,\Delta y - [6.38076]\,\Delta x \quad , \quad \Delta\varphi = [6.1659]\,\Delta y + [8.509\,947]\,\Delta x$$

Nehmen wir z. B. Welfenkaserne mit $y = -23180{,}99_m$ und $x = -26485{,}30_m$ und rechnen nach II und nach III, so finden wir

II von Hochschule aus: $\lambda = 27^\circ\,24'\,28{,}971''$ $\varphi = 52^\circ\,23'\,13{,}970''$

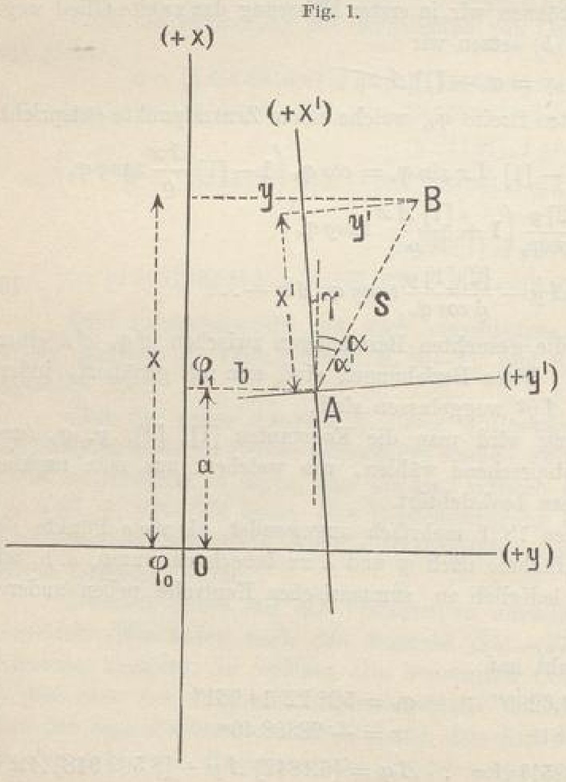
III von Dreifaltigkeit aus: $27^\circ\,24'\,28{,}981''$ $52^\circ\,23'\,13{,}965''$

Jedenfalls genügt das Verfahren, wenn man rasch einen Punkt von Hannover nur etwa auf 0,1″ für Topographie, Vergleichung mit astronomischer Bestimmung u. s. w. haben will, was manchmal vorkommt.

§ 79. Coordinaten-Umformung.

An den Grenzen zweier Coordinaten-Gebiete wird es oft vorkommen, dass man die Coordinaten des einen Systems in die des anderen Systems umzurechnen wünscht.

Fig. 1.



Ohne irgend welche neue Formeln zu entwickeln, kann man Coordinaten verschiedener rechtwinkliger Systeme auf dem Ellipsoid dadurch in einander umformen, dass man den Umweg über geographische Coordinaten (geographische Breiten und Längen) nimmt.

Es sei z. B. in nebenstehender Fig. 1. der Ursprung O eines rechtwinkligen Systemes mit $+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten und ein Punkt A habe in diesem System die Coordinaten a und b. Dieser Punkt A wird zum Ursprunge eines Systemes gemacht, dessen $+x'$-Axe im Meridian von A nach Norden liegt und die Meridian-Konvergenz γ in A gegen den ersten Ursprung O bildet. Irgend ein anderer Punkt B habe im ersten Systeme die Coordinaten x, y und im zweiten Systeme die Coordinaten $x'\,y'$.

Denkt man sich das Ganze auf dem Ellipsoid liegend, so kann man bei gegebener Breite φ_0 des Ursprungs O auch die Breiten- und Längenunterschiede der Punkte A und B, und die Meridian-Konvergenzen berechnen, nach den Formeln von § 55. oder § 78.

Wir wollen beispielshalber setzen (Zahlenbeispiel „Zeitschr. f. Verm.“ 1891, S. 164):

$$\text{Punkt } O,\ \varphi_0 = 48^0\ 0'\ 0'' \tag{1}$$
$$\text{„}\ B,\ y = -100\,000^m,\ x = -100\,000^m \tag{2}$$
$$\text{„}\ A,\ b = -200\,000^m,\ a = -200\,000^m \tag{3}$$

Indem diese Coordinaten alle negativ sind, haben wir A und B beide südwestlich vom Ursprung O zu denken.

Wir rechnen nach der Tafel S. [55]:

	Punkt B	Punkt A
$\varphi = 48° 0'$	$B = 5\,317\,885{,}233^m$	$B = 5\,317\,885{,}233^m$
	$x = -100\,000$	$a = -200\,000$
	$5\,217\,885{,}233$	$5\,117\,885{,}233$
durch Interpolation	$\varphi_1 = 47° 6' 1{,}6896''$	$\varphi_1 = 46° 12' 2.8698''$

Dieses sind die Fusspunktsbreiten, zu welchen aus S. [31], [30] und S. [19] entnommen wird:

$log\,[2] = 8.509\,0025{\cdot}3$	$log\,[2] = 8.509\,0253{\cdot}3$
$log\ V^2 = 0.001\,3501$	$log\ V^2 = 0.001\,3957$

Die weitere Rechnung geht nach § 55. S. 309, was allerdings für die grossen Werte a und $b = 200\,000^m$ kaum ausreicht, doch im wesentlichen noch genügt. Es fand sich

$$\left.\begin{array}{ll|l} \lambda = - & 1° 19'\ 2{,}378'' & \lambda_0 = -\ 2° 35'\ 26{,}337'' \\ \varphi = & 47° \ 5'\ 34{,}414'' & \varphi_0 = \ 46° 10'\ 17{,}124'' \\ & & \gamma = -\ 1° 52'\ 10{,}36'' \end{array}\right\} \tag{4}$$

Nun wird A als neuer Coordinaten-Nullpunkt genommen, weshalb die zugehörigen φ und λ im vorstehenden mit φ_0 und λ_0 bezeichnet sind, dieselben geben auch die Differenzen

$$\begin{array}{ll} \lambda - \lambda_0 = +1^0\ 16'\ 23{,}959'' & \varphi - \varphi_0 = +0^0\ 55'\ 17{,}290'' \\ \varDelta\lambda = +4583{,}959'' & \varDelta\varphi = +3317{,}290'' \end{array} \tag{5}$$

Nun kann man umgekehrt aus $\varDelta\lambda$ und $\varDelta\varphi$ nach (5) die rechtwinkligen Coordinaten von B in Bezug auf A berechnen (nach dem Schema von § 55. S. 309) nämlich:

$$\text{Punkt } B \qquad y' = +96659{,}79^m \quad , \quad x' = +103\,209{,}21^m \tag{6}$$

Damit ist die erste Berechnungsart erledigt; wir haben keine anderen Formeln und Entwicklungen anzuwenden gehabt, als die zu vielen anderen Zwecken ohnehin nötigen Beziehungen zwischen rechtwinkligen und geographischen Coordinaten.

Indessen gestattet unsere Aufgabe auch noch eine zweite einfachere Behandlung, zu der wir nun übergehen:

Wenn die Coordinatensysteme als eben betrachtet werden, so hat man bekanntlich die Umwandlungsformeln:

$$y' = (y - b)\cos\gamma + (x - a)\sin\gamma \tag{7}$$
$$x' = (x - a)\cos\gamma - (y - b)\sin\gamma \tag{8}$$

und entsprechende Formeln sind nun noch mit Gliedern von der Ordnung $1 : r^2$ zu bilden.

Die Soldner schen Formeln von § 46. (14)—(16) S. 261 lassen sich in zweifacher Weise auf unseren Fall anwenden, nämlich nach der Fig. 1. S. 416.

System O:

$$y - b = s \sin \alpha - \frac{(x-a)^2 b}{2 r^2} - \frac{(x-a)^2 (y-b)}{6 r^2} \tag{9}$$

$$x - a = s \cos \alpha + \frac{(x-a) y^2}{2 r^2} - \frac{(x-a)(y-b)^2}{6 r^2} \tag{10}$$

Im System A:

$$y' = s \sin \alpha' - \frac{x'^2 y'}{6 r^2} \tag{11}$$

$$x' = s \cos \alpha' + \frac{x' y'^2}{3 r^2} \tag{12}$$

Dabei ist $\alpha' = \alpha + \gamma$, also:

$$\sin \alpha' = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \tag{13}$$

$$\cos \alpha' = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \tag{14}$$

Damit kann man $\sin \alpha'$ und $\cos \alpha'$ eliminieren, und Verbindungen zwischen (9) und (11) sowie zwischen (10) und (12) herstellen.

$$y' = s \sin \alpha \cos \gamma + s \cos \alpha \sin \gamma - \frac{x'^2 y'}{6 r^2}$$

Dann wegen (8) und (9):

$$y' = \left((y-b) + \frac{(x-a)^2 b}{2 r^2} + \frac{x-a)^2 (y-b)}{6 r^2}\right) \cos \gamma$$

$$+ \left((x-\alpha) - \frac{x-\alpha}{2 r^2} y^2 + \frac{x-a}{6 r^2} (y-b)^2\right) \sin \gamma - \frac{x'^2 y'}{6 r^2}$$

Wenn man dabei bedenkt, dass γ nach (11) oder (12) § 55. S. 304 selbst von der Ordnung $\frac{1}{r}$ ist und dass man daher in den höheren Gliedern $\sin \gamma = 0$ und $\cos \gamma = 1$ setzen darf, so wird man finden:

$$y' = (y-b) \cos \gamma + (x-a) \sin \gamma$$

$$+ \frac{(x-a)^2 b}{2 r^2} + \frac{(x-a)^2 (y-b)}{6 r^2} - \frac{x'^2 y'}{6 r^2}$$

Im letzten Gliede ist es aber genügend, $x' = x - a$ und $y' = y - b$ zu setzen, so dass nur übrig bleibt:

$$y' = (y-b) \cos \gamma + (x-a) \sin \gamma + \frac{(x-a)^2 b}{2 r^2} \tag{15}$$

und auf ganz ähnlichem Wege findet man auch:

$$x' = (x-a) \cos \gamma - (y-b) \sin \gamma + \frac{(x-a) b (b - 2 y)}{2 r^2} \tag{16}$$

Diese Endformeln unterscheiden sich von den im Eingang für ebene Coordinaten angegebenen Formeln (7) und (8) nur durch einfache Zusatzglieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$.

Um diese Formeln (15) und (16) auf das Zahlenbeispiel (1) (2) (3) anzuwenden, muss man zuerst die Meridiankonvergenz γ nach (4) benützen, d. h., wenn die übrige zu (4) gehörige Rechnung nicht gemacht wird, hat man γ für sich nach S. 309 zu bestimmen:

$$\gamma = -1^\circ\, 52'\, 10{,}36'' \tag{17}$$

Weiter hat man aus (2) und (3):

$$y - b = + 100\,000^m \qquad x - a = + 100\,000^m$$
$$b = - 200\,000 \qquad b - 2y = 0$$

Dazu für rund $\varphi = 47°$ nach Seite [18] $log \frac{1}{r^2} = 6.390\,515$.

Damit rechnet man nach den Formeln (15) und (16):

$$y' = + 99946{,}770 - 3262{,}392 - 24{,}576 = + \quad 96659{,}802^m$$
$$x' = + 99946{,}770 + 3262{,}392 - \quad 0{,}000 = + 103\,209{,}162^m$$

Dieses soll mit dem früheren (6) stimmen, was bei y' auf $0{,}01^m$ und bei x' auf $0{,}05^m$ der Fall ist. Diese kleinen Widersprüche mögen wohl darauf beruhen, dass, wie schon bei (4) bemerkt wurde, die a und $b = 200\,000^m$ für unsere Formeln etwas zu gross sind.

Für kleinere Verhältnisse, etwa für die Grenzverwandlungen zwischen den 40 Preussischen Katastersystemen sind die Formeln jedenfalls genügend.

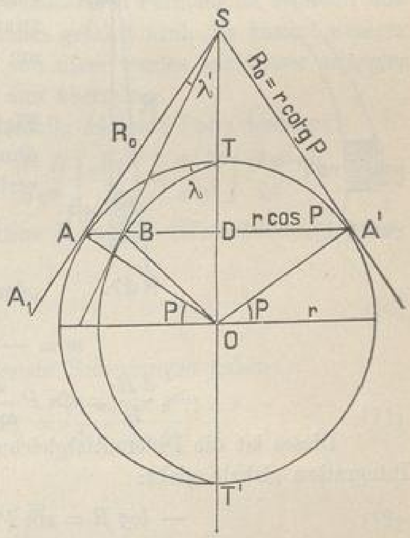
§ 80. Sphärische konforme Kegelprojektion.

Wenn ein Land seine Haupterstreckung von West nach Ost hat, so eignet sich eine Meridian-Axe nicht als Hauptvermessungs-Axe, sondern es ist darnach zu trachten, die Hauptaxe in die West-Ost-Richtung zu bringen.

Eines der Mittel, welche dazu führen, ist die Kegelprojektion, und namentlich die konforme Kegelprojektion, welche in Mecklenburg durch *Paschen* zu diesem Zwecke angewendet worden ist.

Wir werden diese Projektion zuerst sphärisch und dann im nächsten § 81. auch noch sphäroidisch behandeln.

Fig. 1.



In Fig. 1. ist O der Mittelpunkt der als Kugel vom Halbmesser r angenommenen Erde, welche längs eines Parallelkreises AA' durch einen Kegel berührt wird, dessen Spitze S in der verlängerten Erdaxe liegt.

Wenn für den Berührungskreis AA' die Normalbreite $= P$ ist, so sieht man sofort ein, dass die Kegelmantellinie sein wird

$$S\,A = R_0 = r\,cotg\,P \tag{1}$$

Dieser Kegel ist in Fig. 2. S. 420 abgewickelt dargestellt, so dass $S\,A = R_0$ dieselbe Länge wie $S\,A$ in Fig. 1. ist, und $A''\,A\,B$ als Kreisbogen um den Mittelpunkt S die kongruente Abbildung des Parallelkreisbogens $A\,B\,A'$ von Fig. 1. vorstellt.

Auf dem Kreise $A''\,A\,B$ Fig. 2. werden die Bögen $A\,B$ in natürlichem Masse von Fig. 1. nach Fig. 2 hinübergetragen, so dass auch die Winkel λ' bei S in beiden Figuren dieselben werden.

Diese Winkel λ' sind die Meridian-Konvergenzen und stehen zu den Längen λ in der einfachen Beziehung:

$$\lambda' = \lambda\,sin\,P \tag{2}$$