Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 81. Konforme Kegelprojektion des Ellipsoids

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Um m auch als Funktion von x und y darzustellen hat man aus (33):

$$\varDelta\varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2r^2}t - \frac{xy^2}{2r^3}t^2 - \frac{x^3}{6r^3}$$

$$\varDelta\varphi^2 = \frac{x^2}{r^2} - \frac{xy^2}{r^2}t - \frac{x^2y^2}{r^4}t^2 - \frac{x^4}{3r^4} + \frac{y^4}{4r^4}t^2$$

$$\varDelta\varphi^3 = \frac{x^3}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{x^2y^2}{r^4}t \quad \text{und} \quad \varDelta\varphi^4 = \frac{x^4}{r^4}$$

Dieses in (46) eingesetzt giebt:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \frac{x^3}{6r^3}t - \frac{3x^2y^2}{4r^4}t^2 + \frac{x^4}{24r^4}\left(1+3t^2\right) + \frac{y^4}{8r^4}t^2 \tag{47}$$

Die Umkehrung davon giebt:

$$\frac{1}{m} = 1 - \left(\frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \ldots\right) + \left(\frac{x^2}{2r^2} - \ldots\right)^2$$

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{xy^2}{2r^3}t - \frac{x^3}{6r^3}t + \frac{3x^2y^2}{4r^4}t^2 + \frac{x^4}{24r^4}\left(5-3t^2\right) - \frac{y^4}{8r^4}t^2 \tag{48}$$

Für das praktische Rechnen wird man auch $log\, m$ nehmen:

$$l\,m = l\left(1 + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t\ldots\right) = \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \ldots - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2r^2} - \ldots\right)^2 \tag{49}$$

$$log\, m = \frac{\mu x^2}{2r^2} - \frac{\mu xy^2}{2r^3}t + \frac{\mu x^3}{6r^3}t - \frac{3}{4}\frac{\mu x^2y^2}{r^4}t^2 + \frac{\mu}{24r^4}\left(-2+3t^2\right) + \frac{\mu y^4}{8r^4}t^2 \tag{50}$$

Die hier auftretenden Glieder 4ter Ordnung werden wir später dazu benützen können, um sie auch den *sphäroidischen* Formeln, die wir an sich nur bis zur dritten Ordnung entwickeln werden, anzuhängen.

Die vorstehenden Formeln sind auch mit den bis zur 4ten Ordnung geführten sphärischen Formeln übereinstimmend, welche wir in der „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 129—141 entwickelt haben, wobei aber zu beachten ist, dass dort die Coordinaten nach Mecklenburger Art mit $+x$ nach Süden und $+y$ nach Westen gezählt sind („Zeitschr." 1896, S. 130), während wir hier, wie sonst üblich, $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten zählen, so dass z. B. unsere obenstehende Formel (47) für m übergeht in (52) S. 138 „Zeitschr." 1896, wenn man in x und in y die Vorzeichen ändert, so dass im ganzen nur die ungeraden Potenzen xy^2 und x^3 umschlagen, aber x^2 x^2y^2, x^4 und y^4 im Zeichen bleiben.

§ 81. Konforme Kegelprojektion des Ellipsoids.

Mecklenburgische Coordinaten.

Die Übertragung der sphärischen Betrachtungen des vorigen § 80. auf das Ellipsoid ist, soweit die Grundformeln in Betracht kommen, nicht schwierig. Wenn N der Quer-Krümmungs-Halbmesser für die Normalbreite P ist, so wird nach Fig. 1. S. 428 die Kegelstrahllänge:

$$R_0 = N\,cotg\,P \tag{1}$$

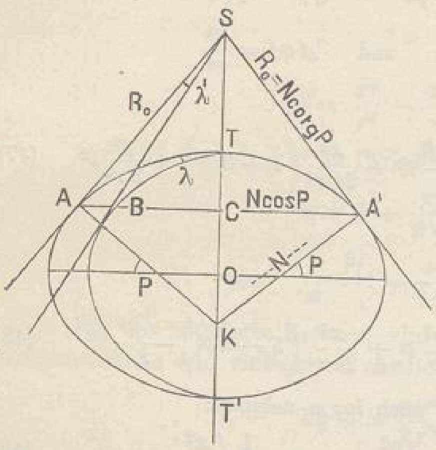
Die Meridian-Konvergenz-Formel bleibt dieselbe wie früher, nämlich:

$$\lambda' = \lambda\,sin\,P \tag{2}$$

Auch die Ähnlichkeitsbedingung hat im wesentlichen die frühere Form, nämlich nach Fig. 2. und Fig. 3. S. 429:

$$m = -\frac{d\,R}{M\,d\,\varphi} = \frac{R\,d\,\lambda'}{N\cos\varphi\,d\,\lambda}$$

Fig. 1.



Es ist nur statt des früheren Kugel-Halbmessers r nun M für den Meridian und N für den Querbogen genommen. Auch die Einsetzung von (2) gestaltet sich wie früher und giebt:

$$m = -\frac{d\,R}{M\,d\,\varphi} = \frac{R\sin P}{N\cos\varphi} \tag{3}$$

$$-\frac{d\,R}{R} = \sin P\,\frac{M}{N}\,\frac{d\,\varphi}{\cos\varphi}$$

Für $\frac{M}{N}$ wollen wir nach (25) § 32. S. 197 setzen:

$$\frac{M}{N} = \frac{1-e^2}{W^2} = \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

Also nach der vorhergehenden Gleichung:

$$-\frac{d\,R}{R} = \sin P\,\frac{(1-e^2)\,d\,\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} \tag{4}$$

Die Integration wird auf dem Wege der Teilbrüche gemacht, indem man zuerst so zerlegt:

$$\frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{2}\,\frac{e^2\cos\varphi}{1+e\sin\varphi} - \frac{1}{2}\,\frac{e^2\cos\varphi}{1-e\sin\varphi}$$

Folglich wird das Integral von (4):

$$\int\frac{(1-e^2)\,d\,\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} = l\,tang\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2}\,e\,l\,(1+e\sin\varphi) + \frac{1}{2}\,e\,l\,(1-e\sin\varphi)$$

$$= l\,tang\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2}\,e\,l\,\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}$$

Die linke Seite von (4) giebt integriert $-l\,R$, und indem man auf beiden Seiten von den natürlichen Logarithmen l zu den gewöhnlichen Logarithmen log übergeht, hat man nun also als Integration von (4):

$$-\log R = \sin P\left\{\log tang\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{e}{2}\log\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right\} + \ldots$$

Zur Bestimmung der Integrations-Konstanten setzen wir fest, dass R_0 und P zusammengehörige Normalwerte sein sollen, also:

$$-\log R_0 = \sin P\left\{\log tang\left(45^\circ+\frac{P}{2}\right) + \frac{e}{2}\log\frac{1-e\sin P}{1+e\sin P}\right\} + \ldots$$

also durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen:

$$\log\frac{R}{R_0} = \sin P\log\frac{tang\left(45^\circ+\frac{P}{2}\right)}{tang\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{e}{2}\sin P\log\frac{1-e\sin P}{1+e\sin P}\,\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi} \tag{5}$$

Auch den geschlossenen Ausdruck für m hat man aus (3):

$$m = \frac{R \sin P}{N \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad m = \frac{R \cos P}{R_0 \cos \varphi} \tag{6}$$

Fig. 2.

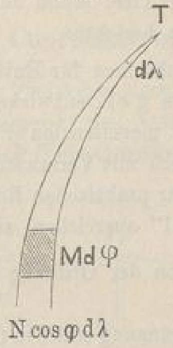


Fig. 3.

Nun muss man alle die Reihenentwicklungen, welche wir im vorigen § 80. sphärisch gemacht haben, auch mit diesen sphäroidischen Formeln durchführen, doch kann das hier nicht ausführlich geschehen. Wir verweisen hiefür auf das Werk „Grossherzoglich Mecklenburgische Landes-Vermessung“ V. Teil: Die konforme Kegelprojektion u. s. w. von Jordan, Mauck, Vogeler, Schwerin 1895 (vgl. § 59. S. 335).

Wir wollen die wichtigsten Formeln von dort ausziehen, aber mit einigen Änderungen:

Erstens hat Mecklenburg die Coordinatenzählung $+x$ nach Süden, $+y$ nach Westen, auch λ nach Westen positiv, während wir hier nach Fig. 5. § 80. S. 423 wie gewöhnlich $+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten und auch λ nach Osten positiv zählen werden. Auch die geographische Breitenzählung, welche mecklenburgisch mit $P - \varphi = p$ nach Süden geht, nehmen wir nun $\varphi - P = \Delta\varphi$ nach Norden.

Zweitens ist in den Mecklenburgischen Formeln meist der Kegelstrahl R_0 als Konstante genommen, während wir nun, wegen der späteren Vergleichung mit anderen Formeln, den Quer-Krümmungs-Halbmesser N der Normalbreite als Hauptkonstante nehmen wollen, so dass wir haben: $R_0 = N \operatorname{cotg} P$, also $R_0 \operatorname{tang} P = N$ oder abgekürzt geschrieben: $R_0 t = N$.

Wir werden auch nicht alle sphäroidischen Glieder höherer Ordnung η^4 u. s. w. aus den Mecklenburgischen Formeln hier mitnehmen. Die Citate Meckl. S... beziehen sich auf die Seitenzahlen des im vorstehenden citierten Mecklenburgischen Werkes.

I. Breitenunterschied $\Delta\varphi$ und Längenunterschied λ als Funktion der Coordinaten x und y, Meckl. S. 23 und 22:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta\varphi}{V^2} = \frac{x}{N} - \frac{3x^2}{2N^2}\eta^2 t - \frac{y^2}{2N^2}t - \frac{xy^2t^2}{2N^3}\left(1 - 3\eta^2\right) - \frac{x^3}{6N^3}\left(1 + 4\eta^2 - 3\eta^2 t^2\right) \\ - \frac{x^2y^2t}{4N^4}\left(-1 + 2t^2\right) - \frac{x^4 t}{24N^4} + \frac{y^4t^3}{8N^4} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\lambda \cos P = \frac{y}{N} + \frac{yxt}{N^2} + \frac{yx^2t^2}{N^3} - \frac{y^3t^2}{3N^3} + \frac{yx^3t^3}{N^4} - \frac{y^3xt^3}{N^4} \tag{8}$$

II. Coordinaten x und y als Funktion von $\Delta\varphi$ und λ, Meckl. S. 19:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{N} = \frac{\Delta\varphi}{V^2} + \frac{3}{2}\frac{\Delta\varphi^2}{V^4}\eta^2 t + \frac{\lambda^2}{2}\sin P \cos P - \frac{\Delta\varphi\lambda^2}{2V^2}\sin^2 P + \frac{\Delta\varphi^3}{6V^6}\left(1 + 4\eta^2 - 3\eta^2t^2\right) \\ + \frac{\Delta\varphi^4 t}{24V^8} - \frac{\lambda^4}{24}\sin^3 P \cos P \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{N} = \lambda \cos P - \frac{\lambda\Delta\varphi}{V^2}\sin P - \frac{3}{2}\frac{\lambda\Delta\varphi^2}{V^4}\cos P\, t^2\eta^2 - \frac{\lambda^3}{6}\sin^2 P \cos P \\ - \frac{\lambda\Delta\varphi^3 \sin P}{6V^6}\left(1 + 4\eta^2 - 3\eta^2t^2\right) + \frac{\lambda^3}{6}\frac{\Delta\varphi}{V^2}\sin^3 P \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

In allen diesen Formeln ist gesetzt $t = tang\, P$, $V^2 = 1 + c'^2 \cos^2 P$, $N = c : V$. Die sphärischen Bestandteile dieser Gleichungen müssen übereinstimmen mit (33), (35), (25), (26) des vorigen § 80.

Ausser dem im vorstehenden citierten amtlichen Mecklenburgischen Werke (dessen genauer Titel schon auf S. 336 angegeben ist) haben wir auch noch einige Ergänzungen zu berichten.

Die Reduktionen für Entfernungen und Richtungswinkel, welche wir hier weder in § 80. noch in § 81. entwickelt haben, sind in *erster* Näherung dieselben wie bei der konformen, meridionalen Projektion in § 50. Gleichungen (12) S. 282 und (31), (32) S. 284, jedoch mit Vertauschung der Bezeichnungen x und y. Die nächsten Glieder hiezu, welche zur praktischen Rechnung mit 7stelligen Logarithmen bei den Richtungswinkeln auf 0,01″ ausreichen, sind in dem Mecklenburgischen Werke § 10. angegeben; mit Gliedern von der Ordnung $\frac{x^2 \Delta y}{r^3}$, $\frac{y^2 \Delta y}{r^3}$ und $\frac{y\, x\, \Delta x}{r^3}$.

Eine Ergänzung mit den Gliedern auch noch $\frac{\Delta y^3}{r^3}$ und $\frac{\Delta y^2 \Delta x}{r^3}$, welche äusserstenfalls noch 0,01″ erreichen, haben wir in „Zeitschr.“ 1895, S. 421—424 gegeben, und endlich, um jedem theoretischen Einwand zu begegnen, haben wir noch in „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 129—143 die ganze Entwicklung sphärisch, mit allen Gliedern 4ter Ordnung, d. h. $\frac{1}{r^4}$ auch noch dazu gemacht.

Hiernach haben die Mecklenburgischen Geodäten eine Kontroll-Diagonale von 285km Länge über ihr Land gerechnet („Zeitschr. für Verm.“ 1896, S. 240—248) mit 1° 30′ Breitenunterschied und 3° 30′ Längenunterschied, d. h. die Diagonale, welche wir auch schon unter den sphäroidischen Normalbeispielen in § 73. S. 392 angegeben haben. Diese Diagonale wurde zweifach berechnet, erstens als geodätische Linie mit reduzierten Breiten nach unseren neuen Formeln, welche in dem späteren Kapitel VIII. zu behandeln sein werden, und zweitens als Projektions-Gerade in der konformen Kegelprojektion, mit sphäroidischen Reduktionen. Folgendes ist die Vergleichung (nach „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 241, 242, 244, 248):

aus geographischen Coordinaten	aus rechtwinkligen Coordinaten	
$\varphi_1 = 53^\circ\ 0'$, $\varphi_2 = 54^\circ 30'$, $\lambda = 3^\circ 30'$	$y_1 = +\ 67129{,}7368^m$ $x_1 = +82986{,}8632^m$ $y_2 = -161\,922{,}5986^m$ $x_2 = -86318{,}9409^m$	
(Bezeichnungen nach Fig. 1. § 76. S. 399)	($+y$ nach Westen, $+x$ nach Süden)	
$S = 284\,835{,}8642^m$	$S = 284\,835{,}8648^m$	$+ 0{,}0006^m$
$log\, S = 5.4545\,946{\cdot}712$	$log\, S = 5.4545\,946{\cdot}721$	$+ 0{\cdot}009$
Azimut $\alpha_1 = 52^\circ 43' 39{,}1835''$	*Azimut* $\alpha_1 = 52^\circ 43' 39{,}1858''$	$+ 0{,}0023''$
„ $\alpha_2 = 55^\circ 33' 2{,}3646''$	„ $\alpha_2 = 55^\circ 33' 2{,}3612''$	$- 0{,}0034''$

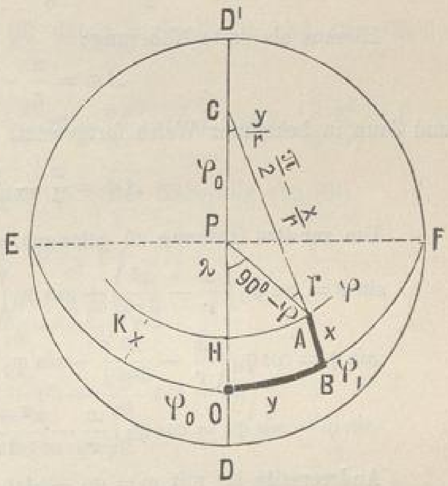
Die übrigbleibenden Fehler sind so weit ausser aller praktischen Schädlichkeit, dass damit die Mecklenburgische konforme Projektion nicht nur für die praktischen Vermessungszwecke, sondern für alle aus irgend welchen Gründen an sie zu stellenden Forderungen genügend nachgewiesen ist.

In rein praktischer Beziehung als Grundlage für topographische und Katastermessungen ist die Mecklenburgische Triangulierung mit ihrer konformen Projektion die beste von allen deutschen Landesvermessungen. Aus Veranlassung einer Gegenbemerkung hat Kammeringenieur Vogeler in Schwerin die Überlegenheit der Mecklenburgischen Projektion über andere deutsche, namentlich die sogen. Soldnersche Projektion in überzeugender und anschaulichster Weise dargelegt in „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 257—263.

§. 82. Queraxige sphärische Coordinaten.

In Fig. 1. ist die kugelförmige Erde in solcher Projektion dargestellt, dass der Äquator als Kreis $E\,D\,F\,D'$ erscheint, in dessen Mittelpunkt der Nordpol P projiziert ist. In einem Punkte O ist rechtwinklig zum Meridian $P\,O$ ein Grosskreisbogen $E\,O\,F$ gelegt, auf welchem eine Länge $O\,B = y$ abgemessen ist zur Bestimmung eines Punktes B, welcher mit $B\,A = x$ rechtwinklig zu $O\,B$ festgelegt wird. Es ist also im Sinne gewöhnlicher sphärischer Coordinaten y die Abscisse und x die Ordinate des Punktes A, wobei es aber gleichgiltig ist, wenn wir statt dessen nun y Ordinate und x Abscisse nennen.

Fig. 1.



Der Bogen $B\,A$ wird verlängert einen Punkt C treffen, welcher Pol des Bogens $E\,O\,F$ genannt wird, und es werden alle Bögen x, welche rechtwinklig auf der Axe $E\,O\,F$ stehen, sich in diesem Punkte C schneiden.

Wenn die Ursprungsbreite in O den Wert φ_0 hat, so ist auch der Bogen $C\,P = \varphi_0$, und um die geographischen Coordinaten von A zu erhalten, müssen wir noch $P\,A$ ziehen, welches mit dem Bogen $P\,A = 90° - \varphi$ und dem Winkel $O\,P\,A = \lambda$ die geographische Breite φ und die geographische Länge λ von A bestimmt.

Zieht man dazu noch den Bogen $C\,A$ in Betracht, so hat man $C\,A = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}$ und bei A den Winkel $P\,A\,C = \gamma$ als Meridian-Konvergenz, sowie bei C den Winkel $P\,C\,A = \frac{y}{r}$.

Nun bietet das sphärische Dreieck $C\,P\,A$ alles was zur Lösung unserer Aufgabe nötig ist, nämlich Bestimmung von φ, λ, γ, aus gegebenen φ_0, y, x und umgekehrt.

Um zuerst φ zu bestimmen, haben wir die Cosinus-Gleichung:

$$\cos(90° - \varphi) = \cos\varphi_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}\right) + \sin\varphi_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}\right)\cos\frac{y}{r}$$

$$\sin\varphi = \cos\varphi_0 \sin\frac{x}{r} + \sin\varphi_0 \cos\frac{x}{r}\cos\frac{y}{r} \tag{1}$$

Zunächst nur bis zur dritten Ordnung entwickelt giebt dieses:

$$\sin\varphi = \cos\varphi_0\left(\frac{x}{r} - \frac{x^3}{6\,r^3}\right) + \sin\varphi_0\left(1 - \frac{x^2}{2\,r^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2\,r^2}\right)$$