Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 83. Queraxige sphäroidische Coordinaten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

In derselben Weise kann man auch (17) in (18) überführen, indem man zuerst $\frac{y}{r}t = \lambda \sin\varphi_0 (1 - \ldots)$ aus (13) nimmt, ferner entwickelt:

$$\frac{xy}{r^2}t = \Delta\varphi\,\lambda \sin\varphi_0 - \Delta\varphi^2 \lambda \sin\varphi_0 t + \frac{\lambda^2}{2}\sin\varphi_0 \cos^2\varphi_0 t - \frac{7}{6}\Delta\varphi\,\lambda^2 \sin\varphi_0 \cos^2\varphi_0 t^2$$

$$\frac{y^3}{r^3} = \lambda^3 \cos^3\varphi_0 - 3\,\Delta\varphi\,\lambda^3 \cos^3\varphi_0\, t \text{ u. s. w.}$$

Alles dieses in (17) eingesetzt und geordnet, wobei das Glied mit $\Delta\varphi^3 \lambda \sin\varphi_0 t$ verschwindet, wird den Übergang auf (18) richtig geben, so dass nun die Formeln (17) und (18) bezw. die beiden (15) und (16) für γ in allen Beziehungen kontrolliert sind.

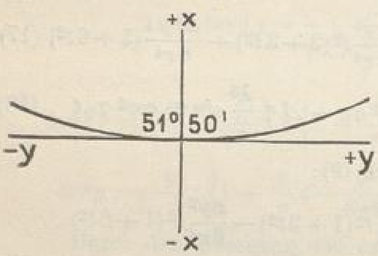
Unmittelbare Anwendungen werden diese sphärischen Formeln nicht geben, ebensowenig als z. B. bei den Soldnerschen Coordinaten die sphärischen Reihen von § 53. zur unmittelbaren Anwendung brauchbar waren. Die entsprechenden Formeln für das Ellipsoid werden wir im folgendem § 83. neu und selbständig entwickeln, aber nur bis zur dritten Ordnung, weil die Glieder 4ter Ordnung, welche wir hier nur sphärisch entwickelt haben, auch den sphäroidischen Gliedern 3ter Ordnung noch angehängt werden können.

§ 83. Queraxige sphäroidische Coordinaten.

Dessauer Coordinaten.

Die Lage des Coordinaten-Systems haben wir wie auch im vorigen § 82 so angenommen, wie in Fig. 1. angedeutet ist, dass nämlich $+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten geht. Die Hauptaxe oder eigentliche Axe ist die y-Axe, welche den mittleren Parallelkreis berührt, dessen Breite in der nachfolgenden Anwendung mit $\varphi_0 = 51°\,50'$ angenommen werden wird.

Fig. 1.



Wir gehen aus von den Formeln (25), (26) (27) § 74. S. 395, welche gelten für den Übergang von einem Punkte in der Breite φ, Länge Null, mit der geodätischen Linie s, die unter dem Azimut α ausgeht zu einem Punkte mit der Breite φ', Länge λ und Endazimut α', also Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$.

Jene Formeln haben wir zweifach anzuwenden, erstens auf den Übergang von O nach B und zweitens von B nach A in Fig. 1. § 82 S. 431.

Der erste Übergang von φ_0 nach φ, mit $s = x$, $\alpha = 90°$ giebt mit $u = 0$, $v = \frac{y}{N_0}$, $t = t_0$ bis zur 3ten Ordnung:

$$\text{I}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{V_0^2} = -\frac{y}{2N_0^2}t_0 && (1)\\
&\lambda_1 \cos\varphi_0 = \frac{y}{N_0} - \frac{y^3}{3N_0^3}t_0^2 && (2)\\
&\gamma_1 = \frac{y}{N_0}t_0 - \frac{y^3}{6N_0^3}t_0(1 + 2t_0^2 + \eta_0^2) && (3)
\end{aligned}\right.$$

Die zweite Anwendung geht vom Punkte $\varphi_1, \lambda_1, \gamma_1$ mit $\alpha = \gamma$, und $s = x$ nach dem Punkte φ, λ_2 gegen (φ_1, λ_2) und $\gamma - \gamma_1$ als Meridian-Konvergenz. Dieses giebt aus (25), (26), (27) S. 395 bis zur dritten Ordnung einschliesslich:

$$\text{II}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\varphi-\varphi_1}{V_1^2} = \frac{x}{N_1}\left(1-\frac{y^2}{2\,N_0^2}t_0^2\right) - \frac{3}{2}\frac{x^2}{N_1^2}\eta_1^2\,t_1 - \frac{x^3}{2\,N_1^3}\eta_1^2(1-t_1^2+\eta_1^2-5\,\eta_1^2 t_1^2) && (4)\\
&\lambda_2 \cos\varphi_1 = \frac{x}{N_1}\frac{y}{N_0}t_0 + \frac{x^2}{N_1^2}\frac{y}{N_0}t_0\,t_1 && (5)\\
&\gamma-\gamma_1 = \frac{x}{N_1}\frac{y}{N_0}t_0\,t_1 + \frac{x}{2\,N_1^2}\frac{y}{N_0}t_0(1+2\,t_1^2+\eta_1^2) && (6)
\end{aligned}\right.$$

Ehe wir diese beiden Gruppen von Gleichungen addieren, müssen wir die N_1 auf N_0, t_1 auf t_0 u. s. w. reduzieren, auch wollen wir überall die N durch V ausdrücken, denn es ist allgemein $N = c:V$.

Dazu hat man nach § 34. S. 208, Gleichung (1):

$$\frac{N_0}{N_1} = \frac{V_1}{V_0} = 1 - \frac{\varphi_1-\varphi_0}{V^2}\eta^2 t$$

also wegen (1):

$$\frac{V_1}{V_0} = 1 + \frac{y^2}{2\,N_0^2}\eta_0^2\,t_0^2 = 1 + \frac{y^2\,V_0^2}{2\,c^2}\eta_0^2\,t_0^2$$

$$\frac{V_1^2}{N_1} = \frac{V_1^3}{c} = \frac{V_0^3}{c}\left(1+\frac{3}{2}\frac{y^2\,V_0^2}{c^2}\eta_0^2\,t_0^2\right) \qquad (7)$$

Zur Reduktion von $\cos\varphi_1$ auf $\cos\varphi_0$ und $\operatorname{tang}\varphi_1$ auf $\operatorname{tang}\varphi_0$ hat man wegen (1):

$$\varphi_1 = \varphi_0 + (\varphi_1-\varphi_0) = \varphi_0 - \frac{y^2}{2\,c^2}t_0$$

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_0 + \frac{y^2}{2\,r^2}t_0 \sin\varphi_0 \qquad (8)$$

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \operatorname{tang}\varphi_0 - \frac{y^2}{2\,c^2}t_0(1+t_0^2)$$

$$\text{d. h.} \qquad t_1 = t_0 - \frac{y^2}{2\,c^2}t_0(1+t_0^2) \qquad (8\text{a})$$

Damit giebt die Gruppe II mit Beschränkung überall auf 3te Ordnung, wobei in den höheren Gliedern schlechthin t statt t_0 u. s. w. geschrieben wird:

$$\text{IIa}\left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}\varphi-\varphi_1 &= \frac{x}{c}V_0^3\left(1+\frac{3}{2}\frac{y^2}{c^2}V^2\eta^2 t^2\right)\left(1-\frac{y^2}{2\,c^2}V^2 t^2\right)\\
&\quad -\frac{3}{2}\frac{x^2}{c^2}V^4\eta^2 t - \frac{x^3}{2\,c^3}V^5\eta^2(1-t^2+\eta^2-5\,\eta^2 t^2)\end{aligned}\right\} && (9)\\
&\lambda_2\left(\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{2\,c^2}\cdots\right) = \frac{x\,y}{c^2}V^2 t + \frac{x^2\,y}{c^3}V^3 t^2 && (10)\\
&\gamma-\gamma_1 = \frac{x\,y}{c^2}V^2 t^2 + \frac{x^2\,y}{2\,c^3}V^3 t(1+2\,t^2+\eta^2) && (11)
\end{aligned}\right.$$

Wenn man dieses IIa mit dem ursprünglichen I zusammennimmt, auch überall (7) berücksichtigt, so erhält man, indem in den höheren Gliedern nur noch t statt t_0 u. s. w. geschrieben wird:

$$
\text{III}\left\{
\begin{aligned}
&\varphi - \varphi_0 = \frac{x}{c}\, V_0{}^3 - \frac{y^2}{2\,c^2}\, V^4\, t - \frac{3\,x^2}{2\,c^2}\, V^4\, \eta^2\, t \\
&\qquad - \frac{x^3}{2\,c^3}\, V^5\, \eta^2\,(1 - t^2 + \eta^2 - 5\,\eta^2\, t^2) - \frac{x\,y^2}{2\,c^3}\, V^5\, t^2\,(1 - 3\,\eta^2) && (12) \\
&\lambda \cos \varphi_0 = \frac{y}{c}\, V_0 + \frac{x\,y}{c^2}\, V^2\, t + \frac{x^2\,y}{c^3}\, V^3\, t^2 - \frac{y^3}{3\,c^3}\, V^3\, t^2 && (13) \\
&\gamma = \frac{y}{c}\, V_0\, t_0 + \frac{x\,y}{c^2}\, V^2\, t^2 + \frac{x^2\,y}{2\,c^3}\, V^3\, t\,(1 + 2\,t^2 + \eta^2) \\
&\qquad - \frac{y^3}{6\,c^3}\, V^3\, t\,(1 + 2\,t^2 + \eta^2) && (14)
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichungen entsprechen den früheren sphärischen Gleichungen (5), (9) (15) im vorigen § 82. S. 432, 433, 436, bis zur dritten Ordnung.

Es handelt sich nun darum, die Gleichungen (12) und (13) nach x und y aufzulösen, was durch fortgesetzte Näherung geschehen muss. Dabei wollen wir uns zur Bequemlichkeit erlauben, statt V_0 und t_0 u. s. w. kurz V und t u. s. w. zu schreiben; während also in (12)—(14), wenigstens in den ersten Gliedern, noch V_0 sowie t_0 und $\cos \varphi_0$ geschrieben war, können wir jetzt, da keine Verwechslung mehr zu befürchten ist, auch in den Gliedern erster Ordnung die Vereinfachung V und t annehmen; wir dürfen aber zum Schlusse nicht vergessen, dass alles dieses sich auf den Ausgangspunkt φ_0 der Breiten beziehen muss.

Gehen wir nach dieser Zwischenbemerkung über zu der indirekten Auflösung der Gleichungen (12) und (13), so haben wir jedenfalls in erster Näherung:

$$\frac{x}{c} = \frac{\varphi - \varphi_0}{V^3} = \frac{\Delta \varphi}{V^3} \quad \text{und} \quad \frac{y}{c} = \frac{\lambda \cos \varphi}{V} \tag{15}$$

$$\frac{x^2}{c^2} = \frac{\Delta \varphi^2}{V^6} \qquad \frac{y^2}{c^2} = \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{V^2} \qquad \frac{x\,y}{c^2} = \frac{\Delta \varphi\, \lambda \cos \varphi}{V^4}$$

Diese Näherungen in (12) und (13) eingesetzt geben bis zur 2ten Ordnung:

$$\frac{x}{c} = \frac{\Delta \varphi}{V^3} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{2\,V}\, t + \frac{3}{2}\, \frac{\Delta \varphi^2}{V^5}\, \eta^2\, t \tag{16}$$

$$\text{und} \quad \frac{y}{c} = \frac{\lambda \cos \varphi}{V} - \frac{\Delta \varphi\, \lambda \cos \varphi}{V^3}\, t \tag{17}$$

Nun nochmals, bis zur 3ten Ordnung aus (16) und (17):

$$\frac{x^2}{c^2} = \frac{\Delta \varphi^2}{V^6} + \frac{\Delta \varphi\, \lambda^2 \cos^2 \varphi\, t}{V^4} + 3\, \frac{\Delta \varphi^3}{V^8}\, \eta^2\, t \tag{18}$$

$$\frac{y^2}{c^2} = \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{V^2} - \frac{2\, \Delta \varphi\, \lambda^2 \cos^2 \varphi}{V^4}\, t \tag{19}$$

$$\frac{x\,y}{c^2} = \frac{\Delta \varphi\, \lambda \cdot \cos \varphi}{V^4} + \frac{\lambda^3}{2\,V^2} \cos^3 \varphi\, t - \frac{\Delta \varphi^2\, \lambda \cos \varphi\, t}{2\,V^6}\,(2 - 3\,\eta^2) \tag{20}$$

Setzt man diese drei Ausdrücke in (12) und (13) ein, und nimmt man dabei für die Glieder 3ter Ordnung kurz die Näherungen (15), so bekommt man:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{x}{c} &= \frac{\Delta \varphi}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2\,V} \cos^2 \varphi\, t - \frac{\Delta \varphi\, \lambda^2}{2\,V^3} \cos^2 \varphi\, t^2 + \frac{3}{2}\, \frac{\Delta \varphi^2}{V^5}\, \eta^2\, t \\
&\quad - \frac{\Delta \varphi^3}{2\,V^7}\, \eta^2\,(-1 + t^2 - \eta^2 - 4\,\eta^2\, t^2)
\end{aligned}
\right\} \tag{21}
$$

$$\frac{y}{c} = \frac{\lambda \cos\varphi}{V} - \frac{\Delta\varphi\,\lambda\cos\varphi\,t}{V^3} - \frac{\lambda^3}{6\,V}\cos^3\varphi\,t^2 - \frac{3}{2}\,\frac{\Delta\varphi^2\,\lambda}{V^5}\cos\varphi\,t^2\,\eta^2 \tag{22}$$

Endlich kann man auch noch die Meridian-Konvergenz in (14) durch (16)—(22) als Funktion von φ und λ darstellen:

$$\gamma = \lambda\sin\varphi - \frac{\lambda^3\,V^2}{6}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{\Delta\varphi^2\,\lambda\sin\varphi}{2\,V^2} \tag{23}$$

Zur Probe kann man auch wieder dieses (23) mit Hilfe von (12) und (13) in (14) zurückverwandeln, was stimmen wird.

Nun haben wir in (12)—(14) und in (21)—(23) alle nötigen Formeln bis zur 3ten Ordnung.

Dazu wollen wir auch noch die rein sphärisch entwickelten Glieder 4ter Ordnung zusetzen, welche im vorigen § 82. unter den Nummern (5), (9), (15) und (10), (13), (16) enthalten sind. Wenn wir ausserdem auch überall die nötigen ϱ zusetzen, so bekommen wir folgende sechs Gleichungen, wobei nochmals zu beachten ist, dass wir zur Bequemlichkeit nur V und t statt der früheren V_0 und t_0 schreiben und dass $\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi$ gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi = {} & \frac{x}{c}V^3\varrho - \frac{y^2}{2\,c^2}V^4 t\,\varrho - \frac{3\,x^2}{2\,c^2}V^4\eta^2 t\,\varrho + \frac{x^3}{2\,c^3}V^5\eta^2(-1+t^2-\eta^2+5\,\eta^2 t^2)\varrho \\ & - \frac{x\,y^2}{2\,c^3}V^5 t^2(1-3\,\eta^2)\varrho - \frac{x^2\,y^2}{2\,c^4}t^3\varrho + \frac{y^4}{24\,c^4}t(1+3\,t^2)\varrho\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda\cos\varphi = {} & \frac{y}{c}V\varrho + \frac{x\,y}{c^2}V^2 t\,\varrho + \frac{x^2\,y}{c^3}V^3 t^2\varrho - \frac{y^3}{3\,c^3}V^3 t^2\varrho + \frac{x^3\,y}{3\,c^4}t(1+3\,t^2)\varrho \\ & - \frac{x\,y^3}{6\,c^4}t(1+6\,t^2)\varrho\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma = {} & \frac{y}{c}V t\varrho + \frac{x\,y}{c^2}V^2 t^2\varrho + \frac{x^2\,y}{2\,c^3}V^3 t(1+2\,t^2+\eta^2)\varrho - \frac{y^3}{6\,c^3}V^3 t(1+2\,t^2+\eta^2)\varrho \\ & - \frac{x\,y^3}{3\,c^4}t^2(2+3\,t^2)\varrho + \frac{x^3\,y}{6\,c^4}t^2(5+6\,t^2)\varrho\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}x = {} & \frac{\Delta\varphi}{\varrho}\,\frac{c}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2\,\varrho^2}\,\frac{c}{V}\cos^2\varphi\,t - \frac{\Delta\varphi\,\lambda^2}{2\,\varrho^3}\,\frac{c}{V^3}\sin^2\varphi + \frac{3}{2}\,\frac{\Delta\varphi^2}{\varrho^2}\,\frac{c}{V^5}\eta^2 t \\ & - \frac{\Delta\varphi^3}{2\,\varrho^3}\,\frac{c}{V^7}\eta^2(-1+t^2-\eta^2-4\,\eta^2 t^2) - \frac{\lambda^4 c}{24\,\varrho^4}\cos^2\varphi\,t\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}y = {} & \frac{\lambda\cos\varphi}{\varrho}\,\frac{c}{V} - \frac{\Delta\varphi\,\lambda\cos\varphi}{\varrho^2}\,\frac{c}{V^3}t - \frac{\lambda^3}{6\,\varrho^3}\,\frac{c}{V}\cos^3\varphi\,t^2 - \frac{3}{2}\,\frac{\Delta\varphi^2\lambda}{\varrho^3}\,\frac{c}{V^5}\cos\varphi\,t^2\,\eta^2 \\ & - \frac{\Delta\varphi^3\,\lambda\,c\sin\varphi}{3\,\varrho^4} + \frac{\Delta\varphi\,\lambda^3\,c\sin\varphi}{6\,\varrho^4}\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\gamma = \lambda\sin\varphi - \frac{\lambda^3\,V^2}{6\,\varrho^2}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{\Delta\varphi^2\,\lambda\sin\varphi}{2\,\varrho^2\,V^2} + \frac{\Delta\varphi\,\lambda^3}{2\,\varrho^3}\sin^2\cos\varphi \tag{29}$$

Man kann die Coëfficienten dieser Formeln teilweise auch in mehr anschaulicher Form schreiben, denn es ist

$$\frac{V^3}{c} = \frac{1}{M} \qquad \frac{V}{c} = \frac{1}{N} \qquad \frac{V^4}{c^2} = \frac{1}{r^2}$$

wobei M und N die Haupt-Krümmungs-Halbmesser und r der mittlere Krümmungs-Halbmesser sind.

Bei den Gliedern 4ter Ordnung, welche nur sphärisch entwickelt sind, haben wir schlechthin c als Halbmesser gesetzt; wir haben diese Glieder auch noch besonders sphäroidisch entwickelt und gefunden für $\varphi - \varphi_0$:

$$-\frac{x^2\,y^2}{2\,c^4}\,V^6\,t^3\,(1+\eta^2\ldots)+\frac{y^4\,V^6\,t}{24\,c^4}\,(1+3\,t^2+\eta^2\,.\,.)$$

Man könnte also wohl den Faktor V^6 in den zwei letzten Gliedern von (24) zusetzen, aber da die vernachlässigten Glieder mit $\eta^2\ldots$ das alles nochmals ändern können, indem $V^2 = 1 + \eta^2$ ist, haben wir kurzer Hand c^4 in allen Gliedern 4ter Ordnung stehen gelassen, obgleich N^4 oder r^4 statt c^4 sich vielleicht mehr empfehlen würde. Es kommt uns bei jenen Gliedern 4ter Ordnung nur auf die wenigen ersten Stellen an.

Zur Anwendung dieser Formeln auf die Dessauer Normalbreite 51° 50′ hat man folgende Konstanten:

$$\begin{array}{rlrl}
\log\cos\varphi & = 9.790\,9541\cdot080 & \log\sin\varphi & = 9.895\,5421\cdot736 \\
\log\cos^2\varphi & = 9.581\,9082\cdot160 & \log\sin^2\varphi & = 9.791\,0843\cdot472 \\
\log e'^2 & = 7.827\,3187\cdot833 & & \\
\log\eta^2 = \log e'^2\cos^2\varphi & = 7.409\,2269\cdot993 & \eta^2 & = 0.002\,5658\cdot248 \\
\log\eta^2\,t^2 = \log c'^2\sin^2\varphi & = 7.618\,4031\cdot305 & \eta^2\,t^2 & = 0.004\,1533\cdot940 \\
V^2 = 1+\eta^2 & = 1{,}002\,565824805 & & \\
\log\eta^4 & = 4.818\,4540 & \eta^4 & = 0{,}00000\,65835 \\
\log\eta^4\,t^2 & = 5.027\,6301 & \eta^4\,t^2 & = 0{,}00001\,06569 \\
\log V^2 & = 0.001\,1128\cdot964 & \log V & = 0.000\,5564\cdot482 \\
\log V^4 & = 0.002\,2257\cdot928 & \log V^3 & = 0.001\,6693\cdot446 \\
\log V^5 & = 0.002\,7822\cdot4 & \log V^7 & = 0.003\,8591\cdot4 \\
\tan\varphi = t,\ \log t & = 0.104\,5880\cdot656 & & \\
\log t^2 & = 0.209\,1761\cdot312 & t^2 & = 1{,}618\,7363\cdot954 \\
\log\varrho & = 5.314\,4251\cdot332 & \log\frac{1}{\varrho} & = 4.685\,5748\cdot668 \\
\log c & = 6.806\,0976\cdot435 & \log c^2 & = 3.612\,1952\cdot870 \\
\log c^3 & = 0.418\,2929\cdot3 & \log c^4 & = 7.224\,3905\cdot7
\end{array}$$

Wenn man diese Konstanten in die vorhergehenden Formeln einführt, so erhält man:

für congruente Coordinaten x, y

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\varphi &= [8.509\,9968\cdot343]\,x - [1.508\,0137\cdot1]\,y^2 - [9.394\,3620]\,x^2 \\ &\quad + [1.811\,208]\,x^3 - [4.803\,7047]\,x\,y^2 - [8.10277]\,x^2\,y^2 + [7.58202]\,y^4\end{aligned}\right\}\quad(24a)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= [8.717\,9298\cdot299]\,y + [2.016\,9767]\,x\,y + [5.316\,0226]\,x^2\,y \\ &\quad - [4.838\,9023]\,y^3 + [8.69416]\,x^3\,y - [8.65540]\,x\,y^3\end{aligned}\right\}\quad(25a)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= [8.613\,4720\cdot035]\,y + [1.912\,5188\cdot8]\,x\,y + [5.328\,6062]\,x^2\,y \\ &\quad - [4.851\,4850]\,y^3 - 8.6582]\,x\,y^3 + [8.688\,74]\,x^3\,y\end{aligned}\right\}\quad(26a)$$

$$\left.\begin{aligned}x &= [1.490\,0031\cdot657]\,\varDelta\varphi + [5.562\,1572\cdot1]\,\lambda^2 - [0.351\,2073]\,\varDelta\varphi\,\lambda^2 \\ &\quad + [3.864\,3715]\,\varDelta\varphi^2 - [7.744\,955]\,\varDelta\varphi^3 - [3.854\,68]\,\lambda^4\end{aligned}\right\}\quad(27a)$$

$$\left.\begin{aligned}y &= [1.282\,0701\cdot701]\,\lambda - [6.071\,1200\cdot1]\,\varDelta\varphi\,\lambda - [9.666\,1530]\,\lambda^3 \\ &\quad - [8.445\,4885]\,\varDelta\varphi^2\,\lambda - [4.96682]\,\varDelta\varphi^3\,\lambda + [4.66579]\,\varDelta\varphi\,\lambda^3\end{aligned}\right\}\quad(28a)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= [9.895\,5421\cdot736]\,\lambda - [8.071\,5618]\,\lambda^3 + [8.964\,5490]\,\varDelta\varphi^2\,\lambda \\ &\quad + [3.33773]\,\varDelta\varphi\,\lambda^3\end{aligned}\right\}\quad(29a)$$

Zu einer ersten Anwendung dieser Formeln wollen wir in runden Zahlen nehmen:

$$x = 50\,000^{\text{m}} \qquad y = 50\,000^{\text{m}} \tag{30}$$

Daraus erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\varphi &= 1609{,}761\,561'' = 26'\,49{,}761\,561'' \\ \lambda &= 2637{,}728\,348'' = 43'\,57{,}728\,348'' \\ \gamma &= 2073{,}867\,723'' = 34'\,33{,}867\,723'' \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

und die Rückverwandlung:

$$\left.\begin{aligned} x &= 50000{,}00015^{\text{m}} \\ y &= 50000{,}00063^{\text{m}} \\ \gamma &= 2073{,}867\,640'' = 34'\,33{,}867\,640'' \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Die Proben stimmen in x auf $0{,}15^{\text{mm}}$, in y auf $0{,}63^{\text{mm}}$ und in γ auf $0{,}000083''$ also überall befriedigend.

Einzelheiten hiezu sind in der „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 88—89 angegeben, wobei aber zu bemerken ist, dass die Coëfficienten zu x^3 und zu $\varDelta\varphi^3$ dort ein wenig anders, d. h. etwas weniger genau in Bezug auf die Glieder η^2 angegeben waren.

Übergang zu konformen Coordinaten x, y.

In den bisherigen Formeln ist angenommen, die Coordinaten x, y seien natürliche, unverzerrte (kongruente), wie in dem Beispiele (30); wir wollen nun aber annehmen, das Coordinatensystem sei ein konformes, entsprechend dem früheren § 50, wobei aber nun die x die Rolle der früheren y übernehmen. Dann geht jedes x über in $x + \dfrac{x^3}{6\,r^2}$ während die y ungeändert bleiben, oder wir wollen nun, indem wir die konformen x mit X bezeichnen, setzen:

$$\left.\begin{aligned} x &= X - \frac{X^3}{6\,r^2} = X - \frac{X^3}{6\,c^2}\,V^4 \\ &\text{wobei für die Breite } 51^\circ\,50'\ \log\frac{1}{6\,r^2} = 5.611\,879 \text{ und } \log\frac{\mu}{6\,r^2} = 2.249\,664 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

wobei übrigens in den Gliedern 4ter Ordnung, wie schon früher, c und r nicht mehr unterschieden zu werden brauchen.

Betrachten wir zuerst die Gleichung (24) für $\varDelta\varphi$, so sieht man, dass die Einführung von (30) nur auf das erste Glied einwirkt, indem es giebt:

$$\frac{x}{c}\,V^3 = \frac{V^3}{c}\left(X - \frac{X^3}{6\,c^2}\,V^4\right) = \frac{V^3}{c} - \frac{V^5}{6\,c^3}(1+\eta^2)\,X^3 \tag{34}$$

Hiezu kommt das Glied in (24), welches x^3 selbst enthält und nun auch mit X^3 geschrieben werden kann, nämlich:

$$-\frac{X^3}{6\,c^3}\,V^5\,(-\,3\,\eta^2 t^2 + 3\,\eta^2 + 3\,\eta^4 - 15\,\eta^4 t^2)$$

Dieses mit dem letzten Gliede von (31) zusammengenommen giebt:

$$-\frac{X^3}{6\,c^3}\,V^5\,(1 + 4\,\eta^2 - 3\,\eta^2 t^2 + 3\,\eta^4 - 15\,\eta^4 t^2)$$

In dieser Form werden wir dieses Glied in der nachfolgenden Gleichung (36) wiederfinden. In (25) bringt das zweite Glied eine Änderung zusammen mit dem ohnehin vorhandenen Gliede $x^3 y$, wo wir aber, weil es nur 4te Ordnung ist, die V^2 weglassen, also:

$$\lambda \cos \varphi = \frac{y}{c} V + \frac{y V^2 t}{c^2}\left(X - \frac{X^3}{6 c^2}\right) \ldots + \frac{X^3 y t}{3 c^4}(1 + 3 t^2) + \ldots$$

$$= \frac{y}{c} V^3 + \frac{y X}{c^2} V^2 t + \frac{y X^3 t}{6 c^4}(-1 + 2 + 6 t^2) = \ldots\ldots \frac{y X^3 t}{6 c^4}(1 + 6 t^2$$

Dieses Glied wird sich in der nachfolgenden Gleichung (37) finden.

Ähnlich wird auch γ behandelt, was wir nicht näher auseinandersetzen wollen.

In der Umkehrungsformel (27) für x erhält man beim Übergang auf konforme Coordinaten (ohne ϱ):

$$X - \frac{X^3}{6 c^2} V^4 = \frac{\Delta \varphi}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{c}{V} \cos^2 \varphi\, t + \ldots$$

also wenn man das Glied mit X^3 auf die rechte Seite bringt, wird:

$$X = \left(\frac{\Delta \varphi}{V^3} c + \frac{\lambda^2 c}{2 V}(\cos^2 \varphi\, t)\right)^3 \frac{V^4}{6 c^2} + \ldots\ldots \qquad - \frac{\Delta \varphi^3}{2} \frac{c}{V^7} \eta^2 (-1 + t^2 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2)$$

$$= \left(\frac{\Delta \varphi^3}{V^9} c^3 + \frac{3 \Delta \varphi^2 \lambda^2 c^3 \cos^2 \varphi\, t}{2 V^7}\right) \frac{V^4}{6 c^2} + \ldots$$

$$= \frac{\Delta \varphi^3}{V^7} \frac{V^2}{6} c + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda^2}{4 V^3} c \cos^2 \varphi\, t + \ldots\ldots \qquad + \frac{\Delta \varphi^2}{2} \frac{c}{V^7} \eta^7 (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2)$$

Das erste und das dritte Glied lassen sich zusammennehmen (mit $V^2 = 1 + \eta^2$) und dadurch wird:

$$X = \frac{\Delta \varphi^3 c}{6\, V^7}(1 + 4 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 + 12 \eta^4 t^2) + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda^2}{4\, V^3} c \cos^2 \varphi\, t + \ldots\ldots$$

Das sind nur die Glieder, welche sich in (27) ändern; im Ganzen hat man dann die Gleichung, wie sie in nachstehender Zusammenstellung bei (39) sich findet. Die Formeln für λ und γ sind dieselben geblieben wie früher (28) und (29). Hiernach hat man folgende Gebrauchsformeln für konforme X, y:

$$\left.\begin{aligned}\Delta \varphi = {} & \frac{X}{c} V^3 \varrho - \frac{y^2}{2 c^2} V^4 t \varrho - \frac{3 X^2}{2 c^2} V^4 \eta^2 t \varrho - \frac{X^3}{6 c^3} V^5 (1 + 4 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 - 15 \eta^4 t^2) \varrho \\ & - \frac{X y^2}{2 c^3} V^5 t^2 (1 - 3 \eta^2) \varrho - \frac{X^2 y^2}{2 c^4} t^3 \varrho + \frac{y^4}{24 c^4} t (1 + 3 t^2) \varrho\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda \cos \varphi = {} & \frac{y}{c} V \varrho + \frac{X y}{c^2} V^2 t \varrho + \frac{X^2 y}{c^3} V^3 t^2 \varrho - \frac{y^3}{3 c^3} V^3 t^2 \varrho \\ & + \frac{X^3}{6 c^4} y t (1 + 6 t^2) \varrho - \frac{X y^3}{6 c^4} t (1 + 6 t^2) \varrho\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma = {} & \frac{y}{c} V t \varrho + \frac{X y}{c^2} V^2 t \varrho + \frac{X^2 y}{2 c^3} V^3 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) \varrho \\ & - \frac{y^3}{6 c^3} V^3 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) \varrho - \frac{X y^3}{3 c^4} t^2 (2 + 3 t^2) \varrho \\ & + \frac{X^3 y}{3 c^4} t^2 (2 + 3 t^2) \varrho\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Für die Umkehrung der Aufgabe hat man:

$$\left.\begin{aligned}X = {} & \frac{\Delta \varphi}{\varrho} \frac{c}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2 \varrho^2} \frac{c}{V} \cos^2 \varphi\, t - \frac{\Delta \varphi \lambda^2}{2 \varrho^3} \frac{c}{V^3} \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi^2}{\varrho^2} \frac{c}{V^5} \eta^2 t \\ & + \frac{\Delta \varphi^3}{6 \varrho^3} \frac{c}{V^7} (1 + 4 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 + 12 \eta^4 t^2) + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda^2}{4 \varrho^4} c \cos^2 \varphi\, t - \frac{\lambda^4 c}{24 \varrho^4} \cos^2 \varphi\, t\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Die früheren (28) und (29) bleiben auch bei konformen Coordinaten giltig und sind hier einzufügen.

Mit ausgerechneten Coëfficienten-Logarithmen bekommt man folgende Formeln:

für konforme Coordinalen X, y

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\varphi &= [8.509\,9968{\cdot}343]\,X - [1.508\,0137{\cdot}1]\,y^2 - [9.394\,3620]\,x^2 \\ &\quad - [4.119\,7471]\,X^3 - [4.803\,7047]\,Xy^2 - [8.10\,277[\,X^2y^2 + [7.58\,202]\,y^4\end{aligned}\right\} \quad (36a)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= [8.717\,9298{\cdot}299]\,y + [2.016\,9767]\,Xy + [5.316\,0226]\,X^2y \\ &\quad - [4.838\,9023]\,y^3 + [8.65\,540]\,Y^3y - [8.65\,540]\,Xy^3\end{aligned}\right\} \quad (37a)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= [8.613\,4720{\cdot}035]\,y + [1.912\,5188{\cdot}8]\,Xy + [5.\,328\,6062]\,X^2y \\ &\quad - [4.851\,4850]\,y^3 - [8.6582]\,Xy^3 + [8.6582]\,X^3y\end{aligned}\right\} \quad (38a)$$

$$\left.\begin{aligned}X &= [1.490\,0031{\cdot}657]\,\varDelta\varphi + [5.562\,1572{\cdot}1]\,\lambda^2 - [0.351\,2073]\,\varphi\,\varDelta\lambda^2 \\ &\quad + [3.864\,3715]\,\varDelta\varphi^2 + [0.079\,8989]\,\varDelta\varphi^3 + [4.63\,283]\,\varDelta\varphi^2\lambda^2 - [3.85\,468]\,\lambda^4\end{aligned}\right\} \quad (39a)$$

Die früheren (28) und (29) gelten auch hier wieder.

Wenn man hiernach das grosse Beispiel (30) rechnen will, so muss man zuerst $x = 50\,000^m$ umwandeln in:

$$X = x + \frac{x^3}{6\,r^2} = 50\,000{,}51143^m, \quad y \text{ bleibt} = 50000^m \quad (40)$$

und damit erhält man aus (36), (37), (38):

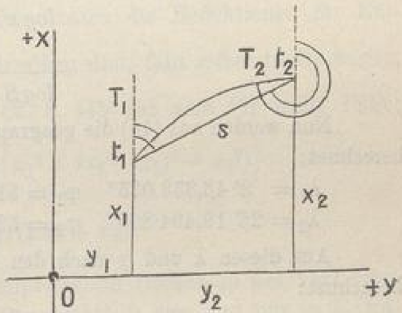
$$\left.\begin{aligned}\varDelta\varphi &= 1609{,}761\,560'' = 0°\,26'\,49{,}761\,560'' \\ \lambda &= 2637{,}728\,353 \;\;= 43'\,57{,}728\,353'' \\ \gamma &= 2073{,}867\,605 \;\;= 34'\,33{,}867\,723''\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

und die Rückverwandlung nach 39 giebt:

$$X = 50\,000{,}51161^m \quad (42)$$

Dieses stimmt auf $0{,}18^{mm}$ mit dem Ausgangswert in (40), y und γ bleiben hier dieselben wie bei (32).

Fig. 2.



Um auch eine Anwendung mit rechtwinkligen Coordinaten zu haben, stellen wir zuerst mit Fig. 2. die Formeln auf, welche aus § 50. dadurch hervorgehen, dass man x und y vertauscht, wie in Fig. 2. angedeutet ist.

Indem wir im übrigen mit t und T die Richtungswinkel wie früher bezeichnen, haben wir nach Fig. 2.:

$$tang\,t_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad s = \frac{y_2 - y_1}{sin\,t_1} = \frac{x - x_{21}}{cos\,t_1}$$

$$tang\,t_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \qquad s = \frac{y_1 - y_2}{sin\,t_2} = \frac{x_1 - x_2}{cos\,t_2}$$

$$t_2 = t_1 \pm 180° \qquad s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Dieses gilt wie immer in der Ebene.

Zum Übergang auf das Ellipsoid (bzw. genähert Kugel) hat man:

$$\left.\begin{aligned}t_1 - T_1 &= (y_2 - y_1)\,\frac{2\,x_1 + x_2}{3}\,\frac{\varrho}{2\,r^2} \\ t_2 - T_2 &= (y_1 - y_2)\,\frac{2\,x_2 + x_1}{3}\,\frac{\varrho}{2\,r^2} \\ log\,S &= log\,s - \frac{\mu}{12\,r^2}\,(x_1{}^2 + 4\,x_0{}^2 + x_2{}^2), \text{ wobei } \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Der mittlere Krümmungs-Halbmesser r hängt von der geographischen Breite ab. Wir nehmen an, wie schon bei (33) S. 443:

$$\varphi_0 = 51^\circ\, 50' \text{ womit } \log r = 6.804\,9847$$

$$\log \frac{\varrho}{2\,r^2} = 1.403426 \qquad \log \frac{\mu}{12\,r^2} = 4.948\,634$$

$$\text{für 7. } \log \text{ Dezimale} \ldots 1.948\,634$$

Die Coordinaten zweier Punkte sind:

$$\begin{array}{llll} & & & \text{konform} \\ P_1 & y_1 = +10\,000^{\mathrm{m}} & & X_1 = +10\,000^{\mathrm{m}} \\ P_2 & y_2 = +30\,000^{\mathrm{m}} & & X_2 = +40\,000^{\mathrm{m}} \\ \hline & y_2 - y_1 = +20\,000^{\mathrm{m}} & & X_2 - X_1 = +30\,000^{\mathrm{m}} \end{array} \tag{44}$$

Man kann auch die zu den konformen X gehörigen kongruenten x berechnen, nämlich wie schon bei (31) angegeben:

$$x = X\left(1 - \frac{X^2}{6\,r^2}\right) = X - \frac{X^3}{6\,r^2} \qquad \left(\log \frac{1}{6\,r^2} = 5.611\,879\right)$$

$$\begin{array}{lll} X_1 = 10000{,}000^{\mathrm{m}} & X_2 = 40000{,}000^{\mathrm{m}} & \text{konform} \\ \quad -0{,}004 & \quad -0{,}262 & \\ \hline x_1 = 9999{,}996^{\mathrm{m}} & x_2 = 39999{,}738^{\mathrm{m}} & \text{kongruent.} \end{array} \tag{45}$$

Nach den Formeln (43) wurde berechnet:

$$\begin{array}{ll} t_1 = 33^\circ\, 41'\, 24{,}2431'' & t_2 = 213^\circ\, 41'\, 24{,}2431'' \\ \qquad -1{,}0127 & \qquad +1{,}5190 \\ \hline T_1 = 33^\circ\, 41'\, 23{,}2304'' & T_2 = 213^\circ\, 41'\, 25{,}7621'' \end{array} \tag{46}$$

$$\begin{array}{l} \log s = 4.5569\,716{\cdot}8 \\ \qquad\quad -37{\cdot}3 \\ \hline \log S = 4.5569\,679{\cdot}5 \end{array} \tag{47}$$

Nun werden aus (44) die geographischen Coordinaten nach den Formeln (36)—(38) berechnet:

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_1 = 8'\, 43{,}353\,035'' & \varphi_1 = 51^\circ\, 55'\, 23{,}265\,935 & \gamma_1 = 6'\, 51{,}469\,147'' \\ \lambda_2 = 26'\, 19{,}494\,863'' & \varphi_2 = 52^\circ\, 11'\, 31{,}394\,840 & \gamma_2 = 20'\, 41{,}84472'' \end{array}\right\} \tag{48}$$

Aus diesen λ und φ nach den Mittelbreiten-Formeln des früheren § 77. wurde berechnet:

$$\log S = 4.556\,9679{\cdot}5 \tag{49}$$

was vollständig mit (47) stimmt, und ferner die Azimute:

$$\alpha_1 = 33^\circ\, 48'\, 14{,}6988'' \qquad \alpha_2 = 214^\circ\, 2'\, 7{,}6060'' \tag{50}$$

das giebt die Probe:

$$\begin{array}{lll} \text{von (46)} & T_1 = 33^\circ\, 41'\, 23{,}2304'' & T_2 = 213^\circ\, 41'\, 25{,}7621'' \\ \text{von (48)} & \gamma_1 = 6'\, 51{,}4691'' & \gamma_2 = 20'\, 41{,}8447'' \\ \hline & T_1 + \gamma_1 = 33^\circ\, 48'\, 14{,}6995'' & T_2 + \gamma_2 = 214^\circ\, 2'\, 7{,}6068'' \\ \text{soll (50)} & \alpha_1 = 33^\circ\, 48'\, 14{,}6988'' & \alpha_2 = 214^\circ\, 2'\, 7{,}6060'' \\ \hline \text{Abweichungen} & 0{,}0007'' & 0{,}0008'' \end{array}$$

Diese kleinen Abweichungen sind bei Azimuten und Richtungswinkeln gleichgiltig. Das Zahlenbeispiel stimmt also in sich selbst vollständig, der angewendeten Rechenschärfe entsprechend.

Indessen müssen wir zu den konformen Coordinaten, welche von Gleichung (33) an eingeführt wurden, doch noch eine reservierende Bemerkung machen:

Während die ganze Entwicklung bis dorthin (33) in sich konsequent auf Potenzreihenentwicklungen beruhend ist, wobei auch klar ist, welche Glieder mit η^2 mitgenommen und welche vernachlässigt sind, ist das von (33) an nicht mehr ebenso der Fall. Für die Ausdehnung mit $X = 50000^m$ und $y = 50000^m$ ist die Brauchbarkeit auch der konformen Formeln innerhalb 1^{mm} gezeigt worden; ob aber beim Übergang zur Konformität die Glieder 3ter Ordnung nicht auch Änderungen in den Zusätzen $\eta^2 \ldots$ erfahren, das wäre durch eine schärfere Entwicklung, etwa ähnlich wie in §§ 86.—88., noch zu behandeln.

§ 84. Allgemeines über queraxige Coordinaten.

In den vorstehenden §§ 82. und 83. haben wir queraxige Coordinaten kennen gelernt, bei welchen in einem angenommenen Ursprungspunkt ein Quernormalbogen von West nach Ost (in der Richtung des sogenannten ersten Vertikals) gelegt, als Hauptaxe angenommen wird.

Indessen in weiterem Sinne können wir auch die aus der konformen Kegelprojektion hergeleiteten rechtwinkligen Coordinaten queraxig nennen, weil dort ein Parallelkreisbogen zunächst gewissermassen als Hauptaxe dient, dem dann im Ursprungspunkt eine Queraxe, in der Ebene berührend, angelegt wird.

Wir wollen diese beiden Arten von queraxigen Coordinaten zuerst unter sich vergleichen und dann auch noch ohne Vergleichung mit den meridionalaxigen Systemen im allgemeinen behandeln.

Dass bei den beiden Arten queraxiger Coordinaten die Reduktionen für Entfernung und für Richtungen bis auf Glieder $\frac{1}{r^2}$ dieselben sind, fällt sofort in die Augen, denn bei der Coordinatenzählung von Fig. 1. § 83. S. 445 hat man für beide Fälle:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2\,r^2} \qquad \frac{s}{S} = 1 + \frac{1}{12\,r^2}\left(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right)$$

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6\,r^2}\,(y_2 - y_2)\,(2\,x_1 + x_2)$$

In der Mecklenburgischen konformen Kegelprojektion reichen in der That diese Glieder schon in II.—III. Triangulierungs-Ordnung praktisch aus, und nur in I. Ordnung kommen noch weitere Glieder 3ter Potenz mit $\frac{1}{r^3}$ in Betracht.

Um auch die Coordinaten-Formeln zu vergleichen, brauchen wir nur die Formeln von §§ 80.—81. einerseits und §§ 82.—83. andererseits zusammenzustellen; indessen wollen wir dabei alle sphäroidischen Bestandteile $\eta^2 \ldots$ u. s. w. ausser Betracht lassen, also nur die sphärischen Glieder vergleichen.

Die Normalbreite ist hiebei natürlich als *gleich* anzunehmen, wir wollen aber die Zeichen P und φ, welche für die Normalbreiten benützt wurden, auch weiter schreiben, um sofort hieran die Formeln zu erkennen; es soll also die Mecklenburgische Normalbreite für konforme Kegelprojektion mit P bezeichnet werden und die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten mit $x_1\, y_1$, dann die Normalbreite für queraxige konforme Coordinaten (Dessau) mit φ, und die Coordinaten mit $x_2\, y_2$.