Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 84. Allgemeines über queraxige Coordinaten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Indessen müssen wir zu den konformen Coordinaten, welche von Gleichung (33) an eingeführt wurden, doch noch eine reservierende Bemerkung machen:

Während die ganze Entwicklung bis dorthin (33) in sich konsequent auf Potenzreihenentwicklungen beruhend ist, wobei auch klar ist, welche Glieder mit η^2 mitgenommen und welche vernachlässigt sind, ist das von (33) an nicht mehr ebenso der Fall. Für die Ausdehnung mit $X = 50000^m$ und $y = 50000^m$ ist die Brauchbarkeit auch der konformen Formeln innerhalb 1^{mm} gezeigt worden; ob aber beim Übergang zur Konformität die Glieder 3ter Ordnung nicht auch Änderungen in den Zusätzen $\eta^2 \ldots$ erfahren, das wäre durch eine schärfere Entwicklung, etwa ähnlich wie in §§ 86.—88., noch zu behandeln.

§ 84. Allgemeines über queraxige Coordinaten.

In den vorstehenden §§ 82. und 83. haben wir queraxige Coordinaten kennen gelernt, bei welchen in einem angenommenen Ursprungspunkt ein Quernormalbogen von West nach Ost (in der Richtung des sogenannten ersten Vertikals) gelegt, als Hauptaxe angenommen wird.

Indessen in weiterem Sinne können wir auch die aus der konformen Kegelprojektion hergeleiteten rechtwinkligen Coordinaten queraxig nennen, weil dort ein Parallelkreisbogen zunächst gewissermassen als Hauptaxe dient, dem dann im Ursprungspunkt eine Queraxe, in der Ebene berührend, angelegt wird.

Wir wollen diese beiden Arten von queraxigen Coordinaten zuerst unter sich vergleichen und dann auch noch ohne Vergleichung mit den meridionalaxigen Systemen im allgemeinen behandeln.

Dass bei den beiden Arten queraxiger Coordinaten die Reduktionen für Entfernung und für Richtungen bis auf Glieder $\frac{1}{r^2}$ dieselben sind, fällt sofort in die Augen, denn bei der Coordinatenzählung von Fig. 1. § 83. S. 445 hat man für beide Fälle:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2\,r^2} \qquad \frac{s}{S} = 1 + \frac{1}{12\,r^2}\left(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right)$$

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6\,r^2}(y_2 - y_2)(2\,x_1 + x_2)$$

In der Mecklenburgischen konformen Kegelprojektion reichen in der That diese Glieder schon in II.—III. Triangulierungs-Ordnung praktisch aus, und nur in I. Ordnung kommen noch weitere Glieder 3ter Potenz mit $\frac{1}{r^3}$ in Betracht.

Um auch die Coordinaten-Formeln zu vergleichen, brauchen wir nur die Formeln von §§ 80.—81. einerseits und §§ 82.—83. andererseits zusammenzustellen; indessen wollen wir dabei alle sphäroidischen Bestandteile $\eta^2 \ldots$ u. s. w. ausser Betracht lassen, also nur die sphärischen Glieder vergleichen.

Die Normalbreite ist hiebei natürlich als *gleich* anzunehmen, wir wollen aber die Zeichen P und φ, welche für die Normalbreiten benützt wurden, auch weiter schreiben, um sofort hieran die Formeln zu erkennen; es soll also die Mecklenburgische Normalbreite für konforme Kegelprojektion mit P bezeichnet werden und die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten mit $x_1\, y_1$, dann die Normalbreite für queraxige konforme Coordinaten (Dessau) mit φ, und die Coordinaten mit $x_2\, y_2$.

Da wir nur die sphärischen Glieder zur Vergleichung ziehen, können wir für die konforme Kegelprojektion den § 80. benützen, dagegen die queraxigen Coordinaten sind in § 82. sphärisch nur kongruent, müssen daher als konform aus § 83. Gleichung (36), (37), (39), (28) ausgezogen werden durch Weglassung aller sphäroidischen Elemente η^2 u. s. w.

Auf diesem Wege sind folgende Vergleichungen erhalten worden:

$$\S 80. (25)\ \frac{x_1}{r} = \Delta\varphi + \frac{\lambda^2}{2} \sin P \cos P - \Delta\varphi \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 P + \frac{\Delta\varphi^3}{6} - \frac{\lambda^4}{24} \sin^3 P \cos P + \frac{\Delta\varphi^4}{24} \operatorname{tang} P$$

$$\S 83. (39)\ \frac{x_2}{r} = \Delta\varphi + \frac{\lambda^2}{2} \sin\varphi \cos\varphi - \Delta\varphi \frac{\lambda^2}{2} \sin^2\varphi + \frac{\Delta\varphi^3}{6} - \frac{\lambda^4}{24} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{\Delta\varphi^2\lambda^2}{4} \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{x_2 - x_1}{r} = -\frac{\lambda^4}{24} \sin\varphi \cos^3\varphi - \frac{\Delta\varphi^4}{24} \operatorname{tang}\varphi + \frac{\Delta\varphi^2\lambda^2}{4} \sin\varphi \cos\varphi \qquad (1)$$

$$\S 80. (26)\ \frac{y_1}{r} = \lambda \cos P - \lambda\, \Delta\varphi \sin P - \frac{\lambda^3}{6} \sin^2 P \cos P + \frac{\Delta\varphi\, \lambda^3 \sin^3 P}{6} - \frac{\Delta\varphi^3 \lambda \sin P}{6}$$

$$\S 83. (28)\ \frac{y_2}{r} = \lambda \cos\varphi - \lambda\, \Delta\varphi \sin\varphi - \frac{\lambda^3}{6} \sin^2\varphi \cos\varphi + \frac{\Delta\varphi\, \lambda^3 \sin\varphi}{6} - \frac{\Delta\varphi^3 \lambda \sin\varphi}{3}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{r} = + \frac{\Delta\varphi\, \lambda^3}{6} \sin\varphi \cos^2\varphi - \frac{\Delta\varphi^3 \lambda}{6} \sin\varphi \qquad (2)$$

$$\S 80. (33)\ \Delta\varphi = \frac{x_1}{r} - \frac{{y_1}^2 t}{2r^2} - \frac{x_1 {y_1}^2 t^2}{2r^3} - \frac{{x_1}^3}{6r^3} - \frac{{x_1}^2 {y_1}^2 t}{4r^4}(2t^2 - 1) + \frac{{y_1}^4 t^3}{8r^4} - \frac{{x_1}^4 t}{24r^4}$$

$$\S 83. (36)\ \Delta\varphi = \frac{x_2}{r} - \frac{{y_2}^2}{2r^2} t - \frac{x_2 {y_2}^2}{2r^3} t^2 - \frac{{x_2}^3}{6r^3} - \frac{{x_2}^2 {y_2}^2}{2r^4} t^3 + \frac{{y_2}^4 t}{24r^4}(1 + 3t^2)$$

$$0 = \frac{x_2 - x_1}{r} - \frac{x^2 y^2}{4r^4} t + \frac{x^4 t}{24r^4} + \frac{y^4 t}{24r^4} \qquad (3)$$

$$\S 80. (35)\ \lambda \cos P = \frac{y_1}{r} + \frac{y_1 x_1}{r^2} t + \frac{y_1 {x_1}^2}{r^3} t^2 - \frac{{y_1}^3 t^2}{3r^3} - \frac{{y_1}^3 x_1}{r^4} t^3 + \frac{y_1 {x_1}^3}{r_4} t^3$$

$$\S 83. (37)\ \lambda \cos\varphi = \frac{y_2}{r} + \frac{y_2 x_2}{r^2} t + \frac{y_2 {x_2}^2}{r^3} t^2 - \frac{{y_2}^3 t^2}{3r^3} - \frac{{y_2}^3 x^2}{6r^4} t(1 + 6t^2) + \frac{y_2 {x_2}^3}{6r^4} t(1 + 6t^2)$$

$$0 = \frac{y_2 - y_1}{r} - \frac{y^3 x}{6r^4} t + \frac{y x^3}{6r^4} t \qquad (4)$$

Die hier auftretenden Differenzen kontrollieren sich gegenseitig, d. h. es ist (1) = (3) und (2) = (4), wenn man in den höheren Gliedern nimmt $\frac{x}{r} = \Delta\varphi$ und $\frac{y}{r} = \lambda \cos\varphi$, wobei auch x_1 von x_2 und y_1 von y_2 nicht mehr zu unterscheiden sind.

Diese Differenzenproben sind erwünscht als durchgreifende Kontrollen aller sphärischen Entwicklungen für x, y, $\Delta\varphi$, λ in §§ 80.—83.

Betrachten wir diese Differenzen näher, so sagen dieselben aus, dass die konforme Kegelprojektion und die queraxige konforme Projektion so nahe verwandt sind, dass sie sich nur um Glieder 4ter Ordnung in x und y unterscheiden.

Bei der Meridian-Konvergenz, welche zwischen (1) § 80. S. 419 und (29) § 83 S. 441 zu vergleichen ist, beträgt der Unterschied dritte Ordnung, welche aber in dieser Beziehung mit der 4ten Ordnung in x und y gleichartig zu achten ist. Da die Glieder 4ter Ordnung in den Coordinatenrechnungen sehr wenig ausmachen, kann man für kleinere Ausdehnung die Kegelprojektion und die queraxige Projektion fast als identisch betrachten.

Vergleichen wir weiter und setzen etwa den Fall, man wolle für ein Land von ausgesprochen west-östlicher Ausdehnung, wie z. B. Sachsen oder die Schweiz, ein west-östlich angepasstes System anlegen, so empfiehlt sich das konforme Kegelsystem durch die scharfe Definition seines Prinzips, das in geschlossener Form angebbar und bis zu allen nötigen Ordnungen bereits entwickelt vorliegt (Mecklenburg). Als kleiner Nachteil ist nur die algebraische Form der Richtungsreduktionen zu betrachten, welche für Triangulierung I. Ordnung mit $\frac{1}{r^2}$ nicht ausreicht, sondern noch $\frac{1}{r^3}$ und nach Umständen sogar noch einzelne $\frac{1}{r^4}$ verlangen kann; doch ist schon von der Triangulierung II. Ordnung an die Richtungsreduktion mit $\frac{1}{r^2}$ genügend.

Solche Glieder mit $\frac{1}{r^3}$ treten bei der eigentlich queraxigen Projektion (§ 82.—83.) nicht auf, und das queraxige System ist insofern im Vorteil; aber andererseits müssen wir hiezu bemerken, dass eine vollendete Entwicklung der Formeln für rein queraxiges System in unseren vorstehenden §§ 82.—83. noch nicht vorliegt. Jene §§ 82.—83. sind bei mässiger Ausdehnung, wie sie in § 83. vorausgesetzt wurde, jedenfalls ausreichend, aber im Falle der Ausdehnung auf ein erheblich grösseres Land wäre diese Theorie noch weiter auszubilden, wie auch schon am Schlusse von § 83. bemerkt wurde.

Alles bisherige bezog sich auf die Vergleichung der beiden Arten queraxiger Coordinaten unter sich; wir wollen auch noch das nötigste zur Vergleichung queraxiger Coordinaten mit den üblichen meridional-axigen Coordinaten beifügen (aus einem Vortrag über deutsche Coordinaten-Systeme, „Zeitschr. f. Verm." 1895, S. 342).

Alle süddeutschen und auch die 40 preussischen Systeme haben als Hauptaxe je den Meridian eines Punktes, und man hat sich daran gewöhnt, das als zu einem ordentlichen Coordinaten-System gehörig anzusehen, allein der Meridian ist dabei nicht wesentlich. Bayern, Württemberg, Baden haben ihre Haupterstreckung von Süden nach Norden, und da war es natürlich, die Hauptaxe in den Meridian zu legen, zumal der Meridian eine jedem Laien geläufige geodätische Linie ist. Wenn aber ein Land wesentlich west-östlich erstreckt ist, wie z. B. Sachsen, Mecklenburg, Anhalt, so liegt kein Grund mehr vor, die Hauptaxe in den Meridian zu legen, im Gegenteil, ohne Rechnung kann jeder einsehen, dass dann eine *Queraxe* von West nach Ost eine Menge Verzerrungen ersparen muss.

Diesen naheliegenden Gedanken hatte ich gelegentlich früher („Zeitschr. f. Verm." 1876, S. 266) ausgesprochen, und 1894 wurde daraus Veranlassung gegeben zu einer amtlichen Behandlung der Sache (vgl. Queraxige rechtwinklige konforme Coordinaten, „Zeitschr. f. Verm." 1894, S. 65—74 mit Mittelbreite $\varphi_0 = 51° 50'$ S. 72).

In Hinsicht auf die rechtwinkligen Coordinaten selbst ändert sich dabei gar nichts, als dass die Bedeutung der x und y vertauscht wird, und auch die Beziehungen zwischen rechtwinkligen und geographischen Coordinaten werden den früheren ganz entsprechend, d. h. sie werden nicht schwieriger als für die Meridianaxe. Der Unterschied liegt eben nur in der Anpassung der Hauptaxe an die Haupterstreckung des Landes. Der Meridian an sich hat allerdings den Vorzug, dass er als Axe beliebig lang sein kann, also z. B. vom Äquator bis zum Pol als Axe *eines* Systems dienen könnte; allein wenn es sich auch in der Richtung der Hauptaxe selbst nur um mässige

Erstreckung handelt, z. B. um wenige hundert Kilometer, dann tritt dieser Vorzug fast ganz zurück, und dann hat die Queraxe auch für die mathematische Formelentwicklung dieselbe Berechtigung wie der Meridian.

Wie wichtig aber die Anpassung der Axe an die Landesform ist, mag an dem Beispiel von Mecklenburg gezeigt werden. Dieses Land hat von Süd nach Nord nur etwa $^2/_3$ der Ausdehnung, welche von West nach Ost stattfindet, und durch die konforme Kegelprojektion, welche im wesentlichen queraxig ist, ist daher die Maximalverzerrung nur $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ oder kaum die Hälfte von der Verzerrung, welche eine Meridianaxe bringen müsste.

Auch der kleine Staat Anhalt hat wesentlich west-östliche Erstreckung, nämlich rund 110^{km} von West nach Ost und nur 55^{km} von Süd nach Nord. Mit einer Queraxe unter $51° 50'$ Breite sind die grössten Abscissen nach Norden rund 30^{km}, also nach der Tabelle (8) § 49. S. 276 ist die grösste Linearverzerrung nur $0{,}011^m$ auf 1000^m, während bei Wahl der Magdeburger Meridianaxe die grössten Ordinaten nach Osten 66^{km} würden mit Linearverzerrung (nach S. 276) an rund $0{,}05^m$ auf 1^{km}, d. h. 5mal so gross als im ersten Falle, und in den Winkelverzerrungen stellt sich die Sache noch viel ungünstiger für die Magdeburger Axe.

Als Anhang zu § 84. nehmen wir noch eine kurze Betrachtung über

Schiefaxige Coordinaten.

In theoretischer Beziehung könnte man noch weiter gehen und z. B. einem Lande, dessen Haupterstreckung von Südwest nach Nordost ginge, eine Hauptaxe im Azimut 45° anlegen u. s. w. Allein solche Abnormitäten sind höchstens für rein kartographische Zwecke versucht worden; für praktisch geodätische Zwecke dürfen wir die zwei Hauptrichtungen nicht verlassen, weil sonst die Beziehungen zu den von der Drehung der Erde vorgeschriebenen geographischen Coordinaten zu verwickelt würden.

Dagegen sind schiefaxige Coordinaten in anderem Sinne schon mehrfach eingeführt worden. Z. B. die in den Preussischen Rheinlanden früher angelegten Coordinaten-Systeme in grösserer Zahl, welche wir schon in § 59. S. 332 (unten im Kleingedruckten) erwähnt haben, sind als schiefaxige zu betrachten, indem die „Parallele zum Meridian von Köln" als Abscissenaxe angenommen wurde.

Auch die bayrischen „Lokalsysteme", über welche wir ebenfalls schon in § 59. S. 327 berichtet haben, sind ähnlich schiefaxig, denn es hat jedes solche System in dem Lokalnullpunkt eine x-Axe, welche um die Meridian-Konvergenz verdreht ist gegen den Meridian des Lokalnullpunktes. Als Vorteil davon wird angegeben, dass bei den Coordinaten-Transformationen dadurch einige Rechenglieder erspart werden — das mag sein, aber *schief*axige Coordinaten bringen in Bezug auf die niemals abzuschaffenden geographischen Coordinaten so viel Unzuträglichkeiten mit sich, dass dagegen jene kleinen Vorteile zurücktreten.

Vgl. Transformation rechtwinklig-sphärischer Coordinaten auf neue Normalpunkte, von Dr. J. H. Franke in München, Astr. Nachr. 126. Band, Dezember 1890, S. 355, Systeme II, und Bauernfeind, „Zeitschr. f. Verm." 1891, S. 161—165.

Eine neuere Mitteilung von Franke über diese Lokalsysteme giebt „Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 327—332.

Die bayrischen Reduktionsformeln für die Lokalsysteme gehen aus unseren Formeln von § 79. (15) und (16) S. 418 einfach dadurch hervor, dass man $\gamma =$ *Null* setzt.