UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 85. Rechtwinklige konforme sphärische Coordinaten mit Gliedern bis zur 4ten Ordnung $1/r^4$.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Visual Library

§ 85. Rechtwinklige konforme sphärische Coordinaten mit Gliedern bis zur 4ten Ordnung $\frac{1}{r^4}$.

Indem wir darauf ausgehen, die Gauss schen konformen rechtwinkligen Coordinaten mit Meridiananschluss auf dem Ellipsoide zu entwickeln, wollen wir an die ersten sphärischen Näherungen von § 50. nochmals anschliessen, und zunächst noch auf der Kugel bleibend, in dem Sinne der früheren Entwicklungen von § 50. die sphärischen Reihen bis $\frac{1}{r^4}$ weiterführen.

Dazu muss vor allem das Projektionsgesetz selbst schärfer ausgedrückt werden als in § 50. geschehen ist. Wir müssen auf die durch Integration erhaltene strenge Gleichung (7) § 50. S. 280 zurückgreifen, nämlich:

$$\frac{y}{r} = l\,tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathfrak{y}}{2r}\right)$$

oder für dekadische Logarithmen, mit $\mu = 0{,}43429\,..$:

$$y = \frac{r}{\mu}\log tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathfrak{y}}{2r}\right) \tag{1}$$

Das Vergrösserungsverhältnis ist nach (5) § 50. S. 280 zunächst streng:

$$m = \frac{dy}{d\mathfrak{y}} = sec\frac{\mathfrak{y}}{r} \tag{2}$$

Die Funktion (1) kann in einer Reihe entwickelt werden, indem man zunächst rein goniometrisch umwandelt:

$$tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathfrak{y}}{2r}\right) = \frac{1 + tang\frac{\mathfrak{y}}{2r}}{1 - tang\frac{\mathfrak{y}}{2r}} = \frac{1+t}{1-t} \tag{3}$$

Die logarithmische Reihe von § 28. S. 169 darauf angewendet giebt:

$$\log(1+t) = \mu\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - ..\right)$$

$$\log(1-t) = \mu\left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} - ..\right)$$

$$\log\frac{1+t}{1-t} = 2\mu\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \ldots\right)$$

Die Tangentenreihe § 28. S. 172 giebt:

$$t = tang\frac{\mathfrak{y}}{2r} = \frac{\mathfrak{y}}{2r} + \frac{\mathfrak{y}^3}{24\,r^3} + \frac{\mathfrak{y}^5}{240\,r^5}$$

$$t^3 = \;,,\;\;,, = \;,, + \frac{\mathfrak{y}^3}{8\,r^3} + \frac{\mathfrak{y}^5}{32\,r^5}$$

$$t^5 = \;,,\;\;,, = \;,,\;\;,,\;\;,, + \frac{\mathfrak{y}^5}{32\,r^4}$$

$$t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{\mathfrak{y}}{2r} + \frac{\mathfrak{y}^3}{12\,r^3} + \frac{\mathfrak{y}^5}{48\,r^5}$$

$$\log\frac{1+t}{1-t} = \mu\left(\frac{\mathfrak{y}}{r} + \frac{\mathfrak{y}^3}{6\,r^3} + \frac{\mathfrak{y}^5}{24\,r^5} + \ldots\right)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

also nach (1) und (3):

$$y = \mathfrak{y} + \frac{\mathfrak{y}^3}{6\,r^3} + \frac{\mathfrak{y}^5}{24\,r^5} + \ldots \tag{4}$$

Diese Gleichung muss rückwärts nach $\mathfrak{y}$ aufgelöst werden, was durch schrittweise geführte Näherung geschieht:

$$\mathfrak{y} = y - \frac{y^3}{6\,r^3} + \ldots \qquad \mathfrak{y}^3 = y^3 - \frac{3\,y^5}{6\,r^5}$$

$$\mathfrak{y} = y - \frac{1}{6}\left(\frac{y^3}{r^3} - \frac{3\,y^5}{6\,r^5}\right) - \frac{y^5}{24\,r^5}$$

$$\mathfrak{y} = y - \frac{y^3}{6\,r^3} + \frac{y^5}{24\,r^5} \tag{5}$$

Auch das Vergrösserungsverhältnis m kann man nach (2) bis auf $\frac{1}{r^4}$ entwickeln:

$$\cos\frac{\mathfrak{y}}{r} = 1 - \frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2} + \frac{\mathfrak{y}^4}{24\,r^4}$$

$$\sec\frac{\mathfrak{y}}{r} = 1 + \left(\frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2} - \frac{\mathfrak{y}^4}{24\,r^4}\right) + \frac{\mathfrak{y}^2}{4\,r^4} = 1 + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2} + \frac{5\,\mathfrak{y}^4}{24\,r^4} \tag{6}$$

Dieses stimmt mit der in § 28. S. 172 als bekannt citierten Secans-Reihe.

Man hat also
$$m = 1 + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\,r^2} + \frac{5\,\mathfrak{y}^4}{24\,r^4}$$

oder mit Einführung von (5):

$$m = 1 + \frac{1}{2\,r^2}\left(y - \frac{y^3}{6\,r^3}\right)^2 + \frac{5\,y^4}{24\,r^4}$$

$$m = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} + \frac{y^4}{24\,r^4} \tag{7}$$

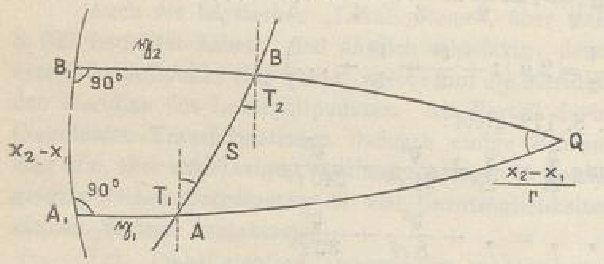
Dazu auch die Umkehrung:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2} + \frac{5y^4}{24\,r^4} \tag{8}$$

und in logarithmischer Form:

$$\log m = \frac{\mu}{2\,A^2}\,y^2 - \frac{\mu}{12\,A^4}\,y^4$$

Fig. 1.



Das nächste ist die schärfere Berechnung der Ordinaten-Konvergenz, wozu dieselbe Betrachtung wie früher bei den Soldner schen Coordinaten § 46. dient; und um nicht dieselbe Sache zweimal machen zu müssen, wollen wir die frühere Gleichung in unsere neuen Bezeichnungen umsetzen, entsprechend Fig. 1., indem wir $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ statt y und y' dann $x_2 - x_1$ statt $x' - x$ und endlich $T_1 - T_2$ statt $\alpha - \alpha'$ schreiben, dadurch geht (7) § 46. S. 260 in diese Form über:

$$\tan\frac{T_1 - T_2}{2} = \frac{\sin\dfrac{\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{y}_1}{2\,r}}{\cos\dfrac{\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1}{2\,r}}\,\tan\frac{x_2 - x_1}{2\,r}$$

Hiernach kann man die Differenz der sphärischen Richtungswinkel T_1 und T_2 scharf berechnen, beliebig weit in Reihen entwickeln, u. s. w.; indessen brauchen wir hievon zunächst nur das Differential:

$$tang\,\frac{d\,T}{2} = \frac{sin\,\frac{\mathfrak{y}}{r}}{cos\,\frac{d\,y}{2\,r}}\,tang\,\frac{d\,x}{2\,r}$$

oder hinreichend genau:

$$\frac{d\,T}{2} = sin\,\frac{\mathfrak{y}}{r}\,\frac{d\,x}{2\,r} \tag{9}$$

hier ist zunächst $\quad sin\,\frac{\mathfrak{y}}{r} = \frac{\mathfrak{y}}{r} - \frac{\mathfrak{y}^3}{6\,r^3}$

also wegen (5):

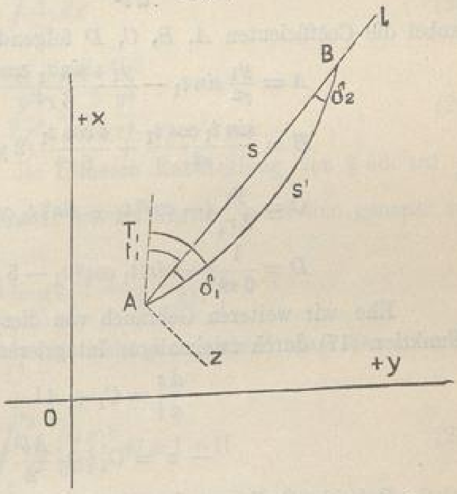
$$sin\,\frac{\mathfrak{y}}{r} = \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6\,r^3}\right) - \frac{y^3}{6\,r^3} = \frac{y}{r} - \frac{y^3}{3\,r^3}$$

folglich nach (9):

$$d\,T = \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{3\,r^3}\right)\frac{d\,x}{r} = \frac{1}{r^2}\left(y\,d\,x - \frac{y^3}{3\,r^2}\,d\,x\right) \tag{10}$$

Nun hat man wieder $d\,T$ als das Krümmungs-Differential der Kurve $A\,B$ zu betrachten, ähnlich wie in der früheren Fig. 6. § 50. S. 283, welche nun in Fig. 2. wiederkehrt, mit der Zeichenänderung, dass die schiefen Coordinaten, welche in Fig. 6. S. 283 mit ξ und η bezeichnet waren, nun durch l und z ausgedrückt sind.

Fig. 2.



Der Grund dieser Zeichenänderung war der, dass eine Kollision des früheren η und η^2 mit unserem sonstigen $\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi$ vermieden werden sollte.

In demselben Sinne wie früher bei (23) S. 283 haben wir also für unseren neuen Fall aus (8):

$$-\frac{d^2 z}{d\,l^2} = \frac{d\,T}{d\,l} = \frac{1}{r^2}\left(y\,\frac{d\,x}{d\,l} - \frac{y^3}{3r}\,\frac{d\,x}{d\,l}\right) \tag{11}$$

Diese Gleichung ist auch hier noch immer genau genug, denn es sollte zwar statt $d\,l$ gesetzt werden $\sqrt{d\,l^2 + dz^2}$, aber es ist nach (35) S. 285 $d\eta$, oder nun dz selbst schon von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, also dz^2 schon von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$, was mit dem ohnehin schon in (11) vorhandenen Faktor $\frac{1}{r^2}$ bereits $\frac{1}{r^6}$ geben würde.

Um (11) weiter auszuführen, müssen wir x und y in l ausdrücken, was nach dem Anblick von Fig. 2. durch folgende Coordinaten-Transformation geschieht:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + l\,cos\,t_1 - z\,sin\,t_1 \\ y &= y_1 + l\,sin\,t_1 + z\,cos\,t_1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die z sind aber selbst Funktionen von l, nämlich nach (35) § 50. S. 285 mit $\eta = z$ und $\xi = l$:

$$z = \frac{l\,s\cos t_1}{6\,r^2}(2\,y_1 + y_2) - \frac{l^2}{2\,r^2}y_1\cos t_1 - \frac{l^3}{6\,r^2}\sin t_1\cos t_1$$

Dieses in (12) eingesetzt giebt:

$$x = x_1 + l\cos t_1 - \frac{l\,s\cos t_1\sin t_1}{6\,r^2}(2\,y_1 + y_2) + \frac{l^2}{2\,r^2}y_1\sin t_1\cos t_1 + \frac{l^3}{6\,r^2}\sin^2 t_1\cos t_1 \quad (13)$$

$$y = y_1 + l\sin t_1 + \frac{l\,s\cos^2 t_1}{6\,r^2}(2\,y_1 + y_2) - \frac{l^2}{2\,r^2}y_1\cos^2 t_1 - \frac{l^3}{6\,r^2}\sin t_1\cos^2 t_1 \quad (14)$$

$$\frac{dx}{dl} = \cos t_1 - \frac{s\cos t_1\sin t_1}{6\,r^2}(2\,y_1 + y_2) + \frac{l}{r^2}y_1\sin t_1\cos t_1 + \frac{l^2}{2\,r^2}\sin^2 t_1\cos t_1 \quad (15)$$

Damit kann man den ersten Teil von (11) bilden, nämlich $y\dfrac{dx}{dl}$ und zum zweiten Teile von (11) braucht man noch von (12):

$$\left.\begin{aligned} & y^3 = y_1^3 + 3\,y_1^2\,l\sin t + 3\,y_1\,l^2\sin^2 t_1 + l^3\sin^3 t_1 + \ldots \\ \text{dazu}\quad & \frac{dx}{dt} = \cos t_1 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Wenn man die beiden Faktoren (14), (15) und die von (16) ausmultipliziert und die beiden Produkte nach der Vorschrift der Gleichung (11) vereinigt, so wird man, nach Potenzen von l ordnend, einen Ausdruck von folgender Form erhalten:

$$-\frac{d^2 z}{d\,l^2} = A + Bl + Cl^2 + Dl^3 \quad (17)$$

wobei die Coëfficienten A, B, C, D folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{y_1}{r^2}\sin t_1 - \frac{y_1\,s\sin t_1\cos t_1}{6\,r^4}(2\,y_1 + y_2) - \frac{y_1^3}{3\,r^4}\cos t_1 \\ B &= \frac{\sin t_1\cos t_1}{r^2} + \frac{s\cos t_1}{6\,r^4}(2\,y_1 + y_2)(\cos^2 t_1 - \sin^2 t_1) \\ C &= \frac{y_1}{2\,r_4}(-\cos^3 t_1 + \sin^2 t_1\cos t_1) \\ D &= \frac{1}{6\,r^4}(-\sin t_1\cos^3 t_1 - 5\sin^3 t_1\cos t_1) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Ehe wir weiteren Gebrauch von diesen Coëfficienten machen, werden wir die Funktion (17) durch zweimaliges Integrieren weiter behandeln:

$$-\frac{dz}{d\,l} = C_1 + A\,l + \frac{Bl^2}{2} + \frac{Cl^3}{3} + \frac{Dl^4}{4} \quad (19)$$

$$-\,z = C_1\,l + \frac{A\,l^2}{2} + \frac{Bl^3}{6} + \frac{C\,l^4}{12} + \frac{D\,l^5}{20} \quad (20)$$

Dabei ist C_1 die erste Integrations-Konstante, und die zweite Integrations-Konstante ist gleich Null, weil $l = 0$ auch $z = 0$ geben muss. Zur Bestimmung der Konstanten C_1 dient die Festsetzung, dass $l = 0$ geben muss $\dfrac{dz}{dl} = +\,\delta_1$ und $l = s$ giebt $\dfrac{dz}{dl} = -\,\delta_2$ und weiter weiss man, dass $l = s$ auch $z = 0$ geben muss, also:

$$-\,\delta_1 = C_1$$

$$+\,\delta_2 = C_1 + A\,s + \frac{B\,s^2}{2} + \frac{C\,s^3}{3} + \frac{D\,s^4}{4}$$

$$0 = C_1 + \frac{A\,s}{2} + \frac{B\,s^2}{6} + \frac{C\,s^3}{12} + \frac{D\,s^4}{20}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{A s}{2} + \frac{B s^2}{6} + \frac{C s^3}{12} + \frac{D s^4}{20} \\ \delta_2 &= \frac{A s}{2} + \frac{B s^2}{3} + \frac{C s^3}{4} + \frac{D s^4}{5} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Hier sind die Coëfficienten A, B, C, D von (18) einzusetzen, was nur noch eine algebraische Zusammensuchung der gleichartigen Teile verlangt und nach dem Ordnen, wenn zugleich $= s \sin t_1 = y_2 - y_1$ und $r \cos t_1 = x_2 - x_1$ gesetzt wird, geben wird:

$$\delta_1 = \frac{(x_2-x_1)(2y_1+y_2)}{6r^2} + \frac{(x_2-x_1)^3}{360 r^4}(8y_1+7y_2) - \frac{(x_2-x_1)}{360 r^4}(8y_1^3+21y_1^2y_2+24y_1y_2^2+7y_2^3) \quad (22)$$

und δ_2 entsprechend mit vertauschten 1 und 2:

$$\delta_2 = \frac{(x_1-x_2)(y_1+2y_2)}{6r^2} + \frac{(x_1-x_2)^3}{360 r^4}(7y_1+8y_2) - \frac{(x_1-x_2)}{360 r^4}(8y_2^3+21y_2^2y_1+24y_2y_1^2+7y_1^3) \quad (22a)$$

Integration für die Länge S des sphärischen Bogens.

Wir haben drei verschiedene Längen zu unterscheiden: die Bogenlänge S auf der Kugel, die Gerade $s =$ Gerade AB der Abbildung und die Kurvenlänge $s' =$ Kurve AB der Abbildung (vgl. Fig. 2. S. 453).

In differentialem Sinne besteht die Gleichung:

$$m = \frac{ds'}{dS} \qquad \text{oder} \qquad dS = \frac{1}{m}\,ds'$$

also auch

$$S = \int \frac{1}{m}\,ds' \quad (23)$$

Dabei ist nach früherer Entwicklung (8) S. 452:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2r^2} + \frac{5}{24}\frac{y^4}{r^4} \quad (24)$$

Das Differential ds', welches bei der früheren Entwicklung von § 50. auf $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich genau schlechthin $= dl$ gesetzt werden durfte, muss nun genauer angegeben werden:

$$ds' = \sqrt{dl^2 + dz^2} = dl\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dl}\right)^2\right)$$

Da $\frac{dz}{dl}$ schon $= \frac{1}{r^2} \ldots$ also $\left(\frac{dz}{dl}\right)^2 = \frac{1}{r^4}$ ist, sieht man alsbald, dass das Integral (23) in zwei Teile zerfällt:

$$S = \int_0^s \frac{1}{m}\,dl + \int_0^s \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dl}\right)^2 dl = \mathrm{I} + \mathrm{II} \quad (25)$$

Bleiben wir zunächst bei dem ersten Integral stehen, so müssen wir die Reihe (24) in eine Reihe mit steigenden Potenzen von l umformen.

Man hat dazu von (14) die Reihe für y, welche quadriert giebt:

$$\left.\begin{aligned} y^2 = y_1^2 &+ l\left(2y_1 \sin t_1 + \frac{y_1 s \cos^2 t_1}{3r^2}(2y_1+y_2)\right) \\ &+ l^2\left(\sin^2 t_1 - \frac{\cos^2 t_1}{3r^2}(5y_1^2 - y_1y_2 - y_2^2)\right) \\ &- l^3 \frac{4}{3}\frac{y_1}{r^2}\sin t_1 \cos^2 t_1 - l^4 \frac{1}{r^3}\sin^2 t_1 \cos^2 t_1 + \frac{1}{r^4}\cdots \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und weiter:

$$y^4 = y_1^4 + l\,4\,y_1^3 \sin t_1 + l^2\,6\,y_1^2 \sin^2 t_1 + l^3\,4\,y_1 \sin^3 t_1 + l^4 \sin^4 t_1 \tag{27}$$

Wenn man damit den Ausdruck (24) zusammensetzt und nach Potenzen von ordnet, soll entstehen:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2} + \frac{5}{24}\frac{y^4}{r^4} = \alpha + \beta\,l + \gamma\,l^2 + \delta\,l^3 + \varepsilon\,l^4$$

also der erste Integralteil von (25):

$$\mathrm{I} = \alpha\,s + \frac{\beta\,s^2}{2} + \gamma\frac{s^3}{3} + \delta\frac{s^4}{4} + \varepsilon\frac{s^5}{5}$$

Hiezu muss man die Teile aus (26) und (27) zusammensuchen, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{I}}{s} &= 1 - \frac{y_1^2}{2\,r^2} - \frac{y_1\,s \sin t_1}{2\,r^2} - \frac{s^2 \sin^2 t_1}{6\,r^2}\\
&+ \frac{1}{12\,r^4}\left(-y_1 \cos^2 t_1\,(2\,y_1 + y_2) + 5\,y_1^3\,s \sin t_1\right)\\
&+ \frac{1}{18\,r^4}\,s^2 \cos^2 t_1\left(5\,y_1^2 - y_1\,y_2 - y_2^2\right) + \frac{5}{12\,r^4}\,y_1^2\,s^2 \sin^2 t_1\\
&+ \frac{1}{6\,r^4}\,y_1\,s^3 \sin t \cos^2 t_1 + \frac{5}{24}\,y_1\,s^3 \sin^3 t_1\\
&+ \frac{1}{30\,r^4}\,s^3 \sin^2 t_1 \cos t_1 + \frac{1}{24\,r^4}\,s^4 \sin^4 t_1\end{aligned}$$

Wenn man hier überall $s \sin t_1 = y_2 - y_1$ und $s \cos t_1 = x_2 - x_1$ setzt und die gleichartigen Teile zusammensucht, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{I}}{s} &= 1 - \frac{y_1^2 + y_1\,y_2 + y_2^2}{6\,r^2} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{360\,r^4}\,(8\,y_1^2 + 14\,y_1\,y_2 + 8\,y_2^2)\\
&+ \frac{1}{24\,r^4}\,(y_1^4 + y_1^3\,y_2 + y_1^2\,y_2^2 + y_1\,y_2^3 + y_2^4)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Um auch den zweiten Teil des Integrals (25) zu bestimmen, müssen wir auf (35) S. 285 zurückgreifen und entnehmen (mit $\eta = z$ und $\xi = l$):

$$\frac{dz}{dl} = \frac{s \cos t_1}{6\,r^2}\left(2\,y_1 + y_2\right) - \frac{l}{r^2}\,y_1 \cos t_1 - \frac{l^2}{2\,r^2} \sin t_1 \cos t_1$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dl}\right)^2 = \frac{\cos^2 t_1}{72\,r^4}\left\{\begin{aligned}&s^2(2\,y_1 + y_2)^2 - l\,12\,s\,y_1\,(2\,y_1 + y_2) + l^2\,36\,y_1^2 - l^2\,6\,s \sin t_1\,(2\,y_1 + y_2)\\ &\qquad + l^3\,36\,y_1 \sin t_1 + l^4\,9 \sin^2 t_1\end{aligned}\right\}$$

Dieses integriert giebt mit $s \sin t_1 = y_2 - y_1$:

$$\frac{\mathrm{II}}{s} = \frac{s^2 \cos^2 t_1}{72\,r^4}\left\{\begin{aligned}&(2\,y_1 + y_2)^2 - 6\,y_1(2\,y_1 + y_2) + 12\,y_1^2 - 2\,(y_2 - y_1)(2\,y_1 + y_2) + 9\,y_1(y_2 - y_1)\\ &\qquad + \frac{9}{5}\,(y_2 - y_1)^2\end{aligned}\right\}$$

All' dieses zusammengezogen vereinfacht sich sehr, und giebt schliesslich:

$$\frac{\mathrm{II}}{s} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{360\,r^4}\left\{4\,y_1^2 + 7\,y_1\,y_2 + 4\,y_2^2\right\} \tag{29}$$

Wenn man die Teile I und II von (28) und (29) zusammennimmt, so hat man nach (25):

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\left.\begin{aligned}\frac{S}{s} = \frac{\mathrm{I}}{s} + \frac{\mathrm{II}}{s} = 1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6\,r^2} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{360\,r^4}(4\,y_1^2 + 7\,y_1 y_2 + 4\,y_2^2) \\ + \frac{1}{24\,r^4}(y_1^4 + y_1^3 y_2 + y_1^2 y_2^2 + y_1 y_2^3 + y_2^4)\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Wenn man die Mittelordinate y_0 einführt nach der Gleichung

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y_0^2 = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(y_1^2 + 2\,y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$y_0^4 = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}(y_1^4 + 4\,y_1^3 y_2 + 6\,y_1^2 y_2^2 + 4\,y_1 y_2^3 + y_2^4)$$

und wenn man auch entsprechende Werte von $\frac{1}{m}$ einführt, nämlich nach (8):

$$\frac{1}{m_1} = 1 - \frac{y_1^2}{2\,r^2} + \frac{5}{24}\frac{y_1^4}{r^4} \qquad \frac{1}{m_2} = 1 - \frac{y_2^2}{2\,r^2} + \frac{5}{24}\frac{y_2^4}{r^4}$$

$$\frac{1}{m_0} = 1 - \frac{y_0^2}{2\,r^2} + \frac{5}{24}\frac{y_0^4}{r^4}$$

so kann man das vorstehende (30) auch auf diese Form bringen:

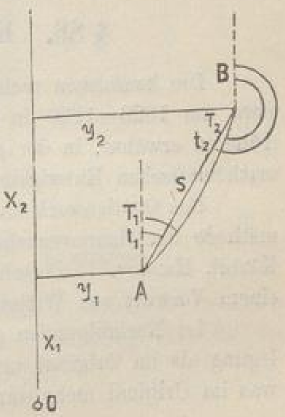
$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2}\right) - \frac{(x_2 - x_1)^2}{360\,r^4}(4\,y_1^2 + 7\,y_1 y_2 + 4\,y_2^2) - \frac{5\,(x_2 - x_1)^4}{2880\,r^4} \quad (31)$$

Das Ergebnis aller vorstehenden Entwicklungen und Betrachtungen ist enthalten in den zwei Gleichungen (22) und (22a) für die Richtungs-Reduktionen und in der Schlussgleichung (31) für die Entfernungs-Reduktion. Wenn man die Glieder mit $\frac{1}{r^4}$ weglässt, gehen die Formeln wieder zurück in die früheren Formeln (31), (32) und (13) in § 50. S. 284 und S. 282.

Einführung von Näherungen für verhältnismässig kleine $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$.

Wenn in einem sehr ausgedehnten System die Dreiecksseiten verhältnismässig klein sind gegen die Ordinaten selbst, so kann man die Glieder 4ter Ordnung, d. h. die Glieder mit $\frac{1}{r^4}$ unterscheiden in solche, bei welchen die Potenzen von y selbst oder nur Potenzen von $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ überwiegen, und man kann letztere Glieder gegen erstere vernachlässigen.

Fig. 3.



Wir wollen dieses näher verfolgen im Anschluss an eine Abhandlung von Oberstlieutenant von Schmidt, Chef der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, in „Zeitschr. f. Verm." 1894, S. 399—400, und indem wir die dort teilweise abweichenden Bezeichnungen in die unsrigen (Fig. 3) umsetzen, haben wir dort (7) 1894 S. 339 und (8) S. 340:

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{8\,A^2}(y_1 + y_2)^2 - \frac{\mu}{24\,A^2}(y_2 - y_1)^2 - \frac{\mu}{192\,A^4}(y_1 + y_2)^4 \quad (32)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$T_1-t_1=\frac{\varrho}{4\,A^2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)-\frac{\varrho}{12\,A^2}(y_2-y_1)(x_2-x_1)-\frac{\varrho}{48\,A^4}(y_1+y_2)^3(x_2-x_1) \quad (33)$$

Es ist nicht schwer, diese Formeln als Vereinfachungen unserer Formeln (30) und (22) nachzuweisen. Nehmen wir zuerst (30) mit Vernachlässigung des Gliedes $\frac{(x_2-x_1)^2}{r^4}\ldots$ und mit Einführung des Mittelwertes $\frac{y_1+y_2}{2}$ im letzten Gliede von (30), so haben wir von dort:

$$\frac{S}{s}=1-\frac{y_1^2+y_1\,y_2+y_2^2}{6\,r^2}+\frac{1}{24\,r^4}\,5\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^4$$

Nach der logarithmischen Reihe S. 169:

$$l\left(\frac{S}{s}\right)=-\frac{y_1^2+y_1\,y_2+y_2^2}{6\,r^2}+\frac{1}{384\,r^4}(y_1+y_2)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{6\,r^2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2\right)^2$$

$$l\,S-l s=-\frac{y_1^2+y_1\,y_2^2+y_2^2}{6\,r_2}-\frac{1}{192\,r^4}(y_1+y_2)^4 \quad (34)$$

Das letzte Glied hier stimmt mit dem letzten Gliede von (32), und da auch die zwei ersten Glieder von (32) sich mit dem ersten Gliede von (34) als algebraisch identisch erweisen und der logarithmische Modul $l\,\mu$ in den Zeichen *log s* und *ls* u. s. w. begründet ist, haben wir nun die Formel (32) als Vereinfachung von (30) nachgewiesen.

Noch kürzer ist einzusehen, wie (33) aus (22) hervorgeht, indem das Glied $\frac{(x_2-x_1)^3}{360\,r^4}\ldots$ in (22) vernachlässigt wird und im letzten Gliede von (22) die Klammer $=60\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^3$ gesetzt wird. Auch dass die zwei ersten Glieder von (33) mit dem einen ersten Gliede von (22) identisch sind, wurde schon in §. 50. S. 284—285 oben bemerkt.

Die konstanten Coëfficienten-Logarithmen der Landesaufnahme-Formeln (32) und (33) sind schon zum Teile auf S. 285 unten angegeben. Die noch dazu gehörigen Coëfficienten 4ter Ordnung sind:

$$log\,\frac{\mu}{192\,A^4}=7{\cdot}134\,373 \qquad log\,\frac{\varrho}{48\,A^4}=6.431\,074$$

Eine praktische Anwendung der Formel (33) haben wir schon früher in Band I. 4. Aufl. 1895, S. 418—419 gegeben, bei dem Schlesisch-Posen schen Netze, mit $y=$ rund 350 000^m; das Glied 4ter Ordnung in (33) brachte dort noch 0,0197″.

§ 86. Konforme Gauss sche Coordinaten.

Die konformen rechtwinkligen Coordinaten mit Meridiananschluss, welche Gauss etwa um 1820—1830 in Hannover eingeführt hat, haben wir schon mehrfach im früheren erwähnt, in der geschichtlichen Übersicht von § 59. S. 328—329 und in der mathematischen Entwicklung erster Näherung von § 50.

Das Quellenwerk für diese klassischen Coordinaten ist: „Theorie der Projektionsmethode der Hannover schen Landesvermessung von *Oscar Schreiber*, Hauptmann im Königl. Hannov. 1. Jägerbataillon, Hannover, Hahn sche Hofbuchhandlung 1866“ mit einem Vorwort von Wittstein.

Im Nachfolgenden geben wir eine Bearbeitung dieser Schrift, in breiterer Darlegung als im Original und mit möglichst geometrischer Auseinandersetzung dessen, was im Original mehr nur analytisch vorgetragen wird.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN