



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 86. Konforme Gaußsche Koordinaten

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](#)

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{4A^2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - \frac{\varrho}{12A^2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) - \frac{\varrho}{48A^4}(y_1 + y_2)^3(x_2 - x_1) \quad (33)$$

Es ist nicht schwer, diese Formeln als Vereinfachungen unserer Formeln (30) und (22) nachzuweisen. Nehmen wir zuerst (30) mit Vernachlässigung des Gliedes $\frac{(x_2 - x_1)^2}{r^4} \dots$ und mit Einführung des Mittelwertes $\frac{y_1 + y_2}{2}$ im letzten Gliede von (30), so haben wir von dort:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6r^2} + \frac{1}{24r^4} 5 \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^4$$

Nach der logarithmischen Reihe S. 169:

$$\begin{aligned} l \left(\frac{S}{s} \right) &= -\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6r^2} + \frac{1}{384r^4} (y_1 + y_2)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{6r^2} \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 \right)^2 \\ l S - ls &= -\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6r^2} - \frac{1}{192r^4} (y_1 + y_2)^4 \end{aligned} \quad (34)$$

Das letzte Glied hier stimmt mit dem letzten Gliede von (32), und da auch die zwei ersten Glieder von (32) sich mit dem ersten Gliede von (34) als algebraisch identisch erweisen und der logarithmische Modul $l \mu$ in den Zeichen $\log s$ und ls u. s. w. begründet ist, haben wir nun die Formel (32) als Vereinfachung von (30) nachgewiesen.

Noch kürzer ist einzusehen, wie (33) aus (22) hervorgeht, indem das Glied $\frac{(x_2 - x_1)^3}{360r^4} \dots$ in (22) vernachlässigt wird und im letzten Gliede von (22) die Klammer $= 60 \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^3$ gesetzt wird. Auch dass die zwei ersten Glieder von (33) mit dem einen ersten Gliede von (22) identisch sind, wurde schon in §. 50. S. 284—285 oben bemerkt.

Die konstanten Coefficienten-Logarithmen der Landesaufnahme-Formeln (32) und (33) sind schon zum Teile auf S. 285 unten angegeben. Die noch dazu gehörigen Coefficienten 4ter Ordnung sind:

$$\log \frac{\mu}{192A^4} = 7.134\,373 \quad \log \frac{\varrho}{48A^4} = 6.431\,074$$

Eine praktische Anwendung der Formel (33) haben wir schon früher in Band I. 4. Aufl. 1895, S. 418—419 gegeben, bei dem Schlesisch-Posenschen Netze, mit $y =$ rund 350 000"; das Glied 4ter Ordnung in (33) brachte dort noch 0,0197".

§ 86. Konforme Gauss sche Coordinaten.

Die konformen rechtwinkligen Coordinaten mit Meridiananschluss, welche Gauss etwa um 1820—1830 in Hannover eingeführt hat, haben wir schon mehrfach im früheren erwähnt, in der geschichtlichen Übersicht von § 59. S. 328—329 und in der mathematischen Entwicklung erster Näherung von § 50.

Das Quellenwerk für diese klassischen Coordinaten ist: „Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung von Oscar Schreiber, Hauptmann im Königl. Hannov. 1. Jägerbataillon, Hannover, Hahn sche Hofbuchhandlung 1866“ mit einem Vorwort von Wittstein.

Im Nachfolgenden geben wir eine Bearbeitung dieser Schrift, in breiterer Darlegung als im Original und mit möglichst geometrischer Auseinandersetzung dessen, was im Original mehr nur analytisch vorgetragen wird.

Allerdings die Grundgleichung der konformen Abbildung auf Grund der Funktionen komplexer Veränderlicher, nämlich die nachfolgende Gleichung (6), $x + iy = f(q + i\lambda)$, müssen wir hier als bekannt voraussetzen.

Die Gauss schen Originalschriften über die Theorie der konformen Abbildung sind:

Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird, von C. F. Gauss. Als Beantwortung der von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Kopenhagen für 1822 gestellten Preisaufgabe, veröffentlicht in Schumachers astronomischen Abhandlungen, Heft 3, Altona 1825.

Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von Carl Friedrich Gauss, erste Abhandlung, der Königl. Societät überreicht 1843, Art. 23.

Den Hauptinhalt dieser Theorieen haben wir schon früher in unserem II. Bande, 2. Auflage, 1878, S. 377—379 abgedruckt u. kommentiert, weshalb es hier genügen mag, hierauf zurückzuverweisen, oder auf irgend ein mathematisches Werk über Funktionen komplexer Veränderlicher Bezug zu nehmen, zur Begründung der nachfolgenden Gleichung (6), der einzigen, die wir aus jenen allgemeinen Theorieen brauchen.

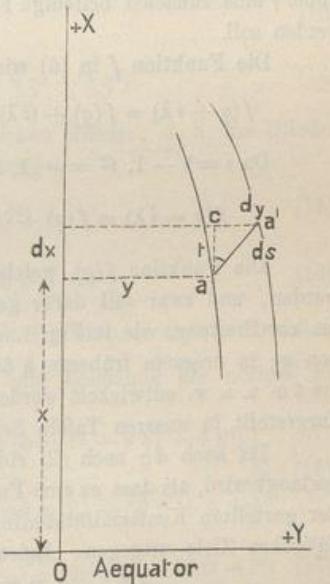
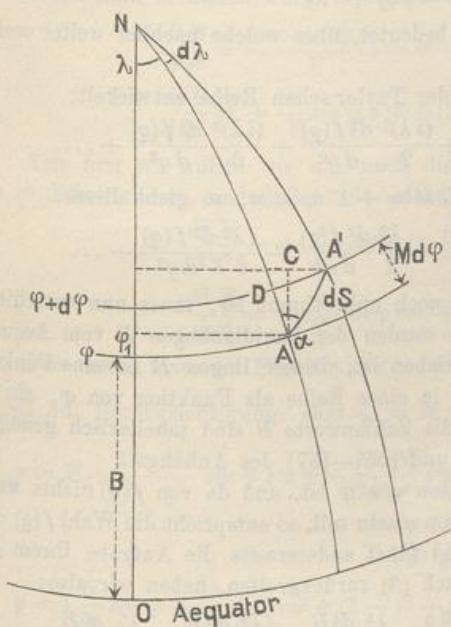
Hier ist auch nochmals das Hannover-sche Coordinateverzeichnis mit Einleitung von Wittstein zu erwähnen, dessen genauer Titel schon in § 59, S. 329 (im Kleingedruckten) angegeben wurde.

Überall im Folgenden haben wir unsere gewöhnlichen Bezeichnungen V^2 , γ^2 u. s. w. angewendet, nach deren Umsetzung unsere Schlussformeln mit den Formeln von Schreiber und Wittstein übereinstimmen.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir über zur mathematischen Behandlung der Sache, indem wir in Fig. 1. ein Stück des Erd-Ellipsoids und in Fig. 2. dessen ebene konforme Abbildung betrachten.

Fig. 1.
Ellipsoid.

Fig. 2.
Ebene.



Auf dem Ellipsoid Fig. 1. werden zwei Punkte A und A' betrachtet mit den Breiten φ und $\varphi + d\varphi$ und mit den Längen λ und $\lambda + d\lambda$; dann hat man ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck $A D A'$, in welchem ist:

$$A D = M d \oplus \quad , \quad D A' = N \cos \varphi \, d \lambda$$

$$\text{also } A A' = dS = \sqrt{(M d\varphi)^2 + (N \cos\varphi d\lambda)^2} \quad (1)$$

Dabei sind M und N wie gewöhnlich die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser, und indem wir auch wie sonst $N: M = V^2$ setzen und weiter zur Abkürzung einführen:

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} \frac{M}{N} = \frac{d\varphi}{V^2 \cos\varphi} = d\varrho \quad (2)$$

erhalten wir (1) in dieser neuen Form:

$$dS = N \cos\varphi \sqrt{d\varrho^2 + d\lambda^2} \quad (3)$$

Ausser dem Dreieck $A D A'$ besteht auf dem Ellipsoid noch ein zweites ebenfalls rechtwinkliges Dreieck $A C A'$, welches zur Bildung rechtwinkliger Coordinaten konform abgebildet wird in der Ebene Fig. 2. durch das Dreieck $a c a'$ mit der Hypotenuse $d s$; es ist also in der Ebene:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt das Vergrösserungsverhältnis:

$$m = \frac{ds}{dS} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{d\varrho^2 + d\lambda^2} N \cos\varphi} \quad (5)$$

Nun kommt die allgemeine Theorie der konformen Abbildung in Betracht, welche wir bereits in der Einleitung dieses Paragraphen erwähnt haben.

Diese allgemeine Theorie sagt aus, dass die in (5) behandelte Abbildung dann konform ist, wenn $x + iy$ eine Funktion von $q + i\lambda$ oder von $q - i\lambda$ ist, d. h. es muss sein:

$$(x + iy) = f(q + i\lambda) \quad (6)$$

wobei f eine zunächst beliebige Funktion bedeutet, über welche nachher weiter verfügt werden soll.

Die Funktion f in (6) wird nach der Taylor schen Reihe entwickelt:

$$f(q + i\lambda) = f(q) + (i\lambda) \frac{df(q)}{dq} + \frac{(i\lambda)^2}{2} \frac{d^2f(q)}{dq^2} + \frac{(i\lambda)^3}{6} \frac{d^3f(q)}{dq^3} + \dots$$

Da $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ u. s. w., so giebt dieses:

$$f(q + i\lambda) = f(q) + (i\lambda) \frac{df(q)}{dq} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2f(q)}{dq^2} - \frac{i\lambda^3}{6} \frac{d^3f(q)}{dq^3} + \dots$$

Die Funktion $f(q)$, welche bisher noch unbestimmt ist, muss nun entschieden werden, und zwar soll dafür genommen werden der Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ , wie in Fig. 1. eingeschrieben ist. Dieser Bogen B ist eine Funktion von φ ; in unserem früheren § 35. ist B in einer Reihe als Funktion von φ , $\sin 2\varphi$, $\sin 4\varphi$ u. s. w. entwickelt worden, und die Zahlenwerte B sind tabellarisch genügend dargestellt in unseren Tafeln Seite [38] und [55]—[57] des Anhangs.

Da auch $d\varrho$ nach (2) eine Funktion von φ ist, und da von $f(q)$ nichts weiter verlangt wird, als dass es eine Funktion von q sein soll, so entspricht die Wahl $f(q) = B$ der gestellten Konformitätsbedingung und führt andererseits die Aufgabe ihrem geodätischen Ziele entgegen. Indem wir nach (6) zurückgreifen, haben wir also:

$$x + iy = B + i\lambda \frac{dB}{dq} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2B}{dq^2} - i\frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3B}{dq^3} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4B}{dq^4} + \frac{i\lambda^5}{120} \frac{d^5B}{dq^5} - \frac{\lambda^6}{720} \frac{d^6B}{dq^6} + \dots$$

Die Vergleichung der reellen und der imaginären Teile giebt:

$$x = B - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2B}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4B}{dq^4} - \frac{\lambda^6}{720} \frac{d^6B}{dq^6} + \dots \quad (7)$$

$$y = +\lambda \frac{d B}{d q} - \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3 B}{d q^3} + \frac{\lambda^5}{120} \frac{d^5 B}{d q^5} + \dots \quad (8)$$

Die Form dieser zwei Reihen ist sofort einleuchtend, weil der als x -Axe genommene Meridian eine Symmetralaxe ist. Der Wert $x - B$ kann als Potenzreihe nur die geraden Potenzen $\lambda^2, \lambda^4 \dots$ enthalten, und es muss mit $\lambda = 0, x - B = 0$, d. h. $x = B$ werden. Ebenso zweifellos muss mit $\lambda = 0$ auch $y = 0$ werden, und da y mit λ gleiches Zeichen haben, im übrigen für $\pm \lambda$ absolut genommen gleich bleiben muss, kann die Reihe (8) nur die ungeraden Potenzen $\lambda, \lambda^3 \dots$ enthalten.

Die Ableitungen von B nach q müssen ausgeführt werden, wozu man hat:

$$\frac{d B}{d q} = M d \varphi = \frac{c}{V^3} d \varphi \quad \text{und} \quad \frac{d q}{d \varphi} = \frac{1}{V^2 \cos \varphi} \quad (9)$$

$$\text{also} \quad \frac{d B}{d q} = \frac{c}{V} \cos \varphi \quad (10)$$

$$\frac{d^2 B}{d q d \varphi} = -\frac{c}{V^2} \frac{d V}{d \varphi} \cos \varphi - \frac{c}{V} \sin \varphi$$

Schon früher gebraucht (§. 34. S. 208) ist $\frac{d V}{d \varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t$, also

$$\frac{d^2 B}{d q d \varphi} = \frac{c}{V^3} \left(\eta^2 \sin \varphi - V^2 \sin \varphi \right) = \frac{c}{V^3} \sin \varphi \left(\eta^2 - (1 + \eta^2) \right)$$

$$\frac{d^2 B}{d q^2} = -\frac{c}{V^3} \sin \varphi \frac{d \varphi}{d q} = -\frac{c \sin \varphi \cos \varphi}{V} \quad (11)$$

Wenn man in diesen Formeln weiter differentiiert, so bekommt man:

$$\frac{d^3 B}{d q^3} = -\frac{c \cos^3 \varphi}{V} (1 - t^2 + \eta^2) \quad (12)$$

$$\frac{d^4 B}{d q^4} = +\frac{c}{V} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \quad (13)$$

Von hier ab wollen wir nur noch die sphärischen Glieder, d. h. die Glieder ohne η^2 differentiiieren, und finden mit solcher Abkürzung:

$$\frac{d^5 B}{d q^5} = +\frac{c}{V} \cos^5 \varphi (5 - 18 t^2 + t^4) \quad (14)$$

$$\frac{d^6 B}{d q^6} = -\frac{c}{V} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58 t^2 + 4 t^4) \quad (15)$$

Nun kann man die Formeln für x und y nach (7) und (8) zusammensetzen, zugleich mit Berücksichtigung, dass $\frac{c}{V} = N$ ist und mit Zusetzung der nötigen φ :

$$\left. \begin{aligned} x &= B + \frac{\lambda^2}{2} \frac{N}{\varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4}{24} \frac{N}{\varrho^4} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \\ &\quad + \frac{\lambda^6}{720} \frac{N}{\varrho^6} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58 t^2 + 4 t^4) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$y = \lambda \frac{N}{\varrho} \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} \frac{N}{\varrho^3} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^5}{120} \frac{N}{\varrho^5} \cos^5 \varphi (5 - 18 t^2 + t^4) \quad (17)$$

Dieses sind die Formeln von Schreiber (6) S. 10, abgesehen von den Gliedern mit η^2 u. s. w. In den Gliedern 5ter und 6ter Ordnung, und innerhalb der 4ten Ordnung haben wir damit die Formeln von Wittstein, S. X. oben.

In erster Näherung stimmen diese Formeln (16) und (17) auch mit unseren früheren (11) und (12) § 58. S. 323.

In den Formeln (16) und (17) sind φ und λ die gegebenen geographischen Coordinaten eines Punktes, und zwar λ nach Osten positiv gezählt von irgend einem Meridian, der als x -Axe eines rechtwinkligen konformen Coordinatensystems angenommen ist. B bedeutet den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ , x und y sind die gesuchten ebenen konformen Coordinaten, und zwar x gezählt wie B vom Äquator der Erde, y rechtwinklig zu x , nach Osten positiv wie λ (vgl. Fig. 1. und 2. S. 459).

Da B und x auf diese Weise sehr grosse Zahlen werden, kann man sie beliebig abkürzen oder von irgend einem Nullpunkt in dem Vermessungsbereich selbst zählen. Doch spielt das in der Theorie keine Rolle, weil immer nur die Differenz $x - B$ in den Formeln auftritt, und deswegen rechnen wir am einfachsten in den Formeln mit B selbst.

Umkehrung der Formeln (16) und (17).

Man kann die Formeln für x und y geradezu umkehren, was wir nun ausführen wollen, aber nur bis zu Gliedern von der 4ten Ordnung einschliesslich, d. h. also zunächst aus (16) und (17):

$$x - B = \frac{\lambda^2}{2} N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4}{24} N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \quad (18)$$

$$y = \lambda N \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \lambda^2) \quad (19)$$

Zuerst wird (19) umgekehrt mit erster Näherung $\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi}$, welche ins zweite Glied gesetzt giebt:

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi} - \frac{y^3}{6 N^3 \cos \varphi} (1 - t^2 + \eta^2) \quad (20)$$

Daraus bildet man auch die zweite Ordnung:

$$\lambda^2 = \frac{y^2}{N^2 \cos^2 \varphi} - \frac{y^4}{3 N^4 \cos^2 \varphi} (1 - t^2 + \eta^2)$$

und dieses in (18) eingesetzt giebt:

$$x - B = \frac{y^2 t}{2 N} + \frac{y^4 t}{24 N^3} (1 + 3 t^2 + 5 \eta^2 + 4 \eta^4) \quad (21)$$

Nach diesem soll der Meridianbogen $x - B$ in der zugehörigen Breitendifferenz $\varphi_1 - \varphi$ ausgedrückt werden, was nach dem früheren § 35. Gleichung (37), S. 218 mit φ_1 als Ausgangsbreite sich so giebt:

$$B - x = M_1 (\varphi - \varphi_1) + \frac{3}{2} \frac{M_1}{V_1^2} \eta_1^2 t_1 (\varphi - \varphi_1)^2$$

$$\text{oder} \quad x - B = M_1 (\varphi_1 - \varphi) - \frac{3}{2} \frac{M_1}{V_1^2} \eta_1^2 t_1 (\varphi_1 - \varphi)^2 \quad (22)$$

Dabei gehören $M_1, \eta_1^2 t_1$, alle zu der Fusspunktsbreite φ_1 , während in (18)–(21) alles sich auf die Breite φ des Punktes selbst bezog. Aus (21) und (22) bekommt man als erste Näherung für die Breitendifferenz $\varphi_1 - \varphi$:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{y^2}{2 M_1 N} t \quad , \quad \varphi = \varphi_1 - \frac{y^2 t}{2 M_1 N} \quad (23)$$

$$\text{Hieraus} \quad \tan \varphi = \tan \varphi_1 - \frac{y^2 t}{2 M_1 N} (1 + t_1^2)$$

Für den weiteren Gebrauch in den höheren Gliedern braucht aber t^1 und t , sowie N_1 und N nicht mehr unterschieden zu werden, also:

$$t = t_1 - \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1} (1 + t_1^2) = t_1 - \frac{y^2 t_1}{2 N_1^2} (1 + \eta_1^2) (1 + t_1^2)$$

Dabei ist berücksichtigt, dass allgemein $N: M = V^2 = 1 + \eta^2$ ist, also:

$$t = t_1 - \frac{y^2 t_1}{2 N_1^2} (1 + t_1^2 + \eta_1^2 + \eta_1^2 t_1^2) \quad (23a)$$

Dieses in (21) eingesetzt gibt:

$$x - B = \frac{y^2 t_1}{2 N} + \frac{y^4 t_1}{24 N_1^3} (-5 - 3 t^2 - \eta^2 - 6 \eta^2 t^2 + 4 \eta^4) \quad (24)$$

Weiter muss im ersten Gliede N durch N_1 ersetzt werden, was nach früherem § 34. S. 208, unten Gleichung (l), geschieht. Wir wollen dabei auch bemerken, dass in den höheren Gliedern φ und φ_1 u. s. w. nicht mehr unterschieden wird. Damit ist nach der citierten Gleichung unten auf S. 208 mit Rücksicht auf (23):

$$\frac{N_1}{N} = 1 + \frac{(\varphi_1 - \varphi)}{V^2} \eta^2 t = 1 + \frac{y^2 \eta^2 t^2}{2 M N V^2} = 1 + \frac{y^2 \eta^2 t^2}{2 N^2} \quad (25)$$

Dieses mit (24) gibt:

$$x - B = \frac{y^2 t_1}{2 N_1} + \frac{y^4 t_1}{24 N_1^3} (-5 - 3 t^2 - \eta^2 + 4 \eta^4) \quad (26)$$

Nun sind die Ausdrücke in (22) und (26) einander gleich, was vollends die Auflösung nach $\varphi_1 - \varphi$ giebt:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1} - \frac{y^4 t_1}{24 M_1 N_1^3} (5 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2 - 4 \eta^4) \quad (27)$$

Damit ist die erste Formel (18) vollständig umgekehrt, und um auch vollends (19), d. h. die vorläufig schon hergerichtete (20) zu erledigen, brauchen wir von (23) mit $N: M = V^2 = 1 + \eta^2$ die Entwicklung:

$$\cos \varphi = \cos \varphi_1 + \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1} \sin \varphi_1 = \cos \varphi_1 + \frac{y^2 t_1}{2 N_1^2} (1 + \eta^2) \sin \varphi_1$$

Dazu nach (25):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N \cos \varphi} &= \frac{1}{N_1 \cos \varphi_1} \left(1 + \frac{y^2 \eta^2 t^2}{2 N^2} - \frac{y^2 t^2}{2 N^2} (1 + \eta^2) \right) \\ \frac{1}{N \cos \varphi} &= \frac{1}{N_1 \cos \varphi_1} \left(1 - \frac{y^2 t^2}{2 N^2} \right) \end{aligned}$$

Dieses in (20) eingesetzt giebt alsbald:

$$\lambda = \frac{y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{y^3}{6 N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 t^2 + \eta^2) \quad (28)$$

Nun haben wir in (27) und (28) die gewünschten Formeln zur Bestimmung von φ und λ und indem wir auch die nötigen φ zusetzen, stellen wir zusammen als Gebrauchsformeln:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1} \varrho + \frac{y^4 t_1 \varrho}{24 M_1 N_1^3} (5 + 3 t_1^2 + \eta_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2 - 4 \eta_1^4) \quad (29)$$

$$\lambda = \frac{y \varrho}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{y^3 \varrho}{6 N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) \quad (30)$$

Diese Formeln entsprechen den Formeln von Schreiber (11) S. 25 und Wittstein S. X. unten.
Diese Formeln stimmen auch in erster Näherung mit unseren früheren (8) und (9) § 58. S. 323.

Meridian-Konvergenz.

Wenn in Fig. 3. *NAS* das konforme Bild eines Meridians, und *WAE* das konforme Bild eines Parallelkreises ist, wobei sich diese beiden Linien in einem Punkte *A* schneiden, durch welchen wir auch die Parallelen *AB* und *AC* mit den Coordinatenachsen ziehen, so entsteht ein kleiner Winkel γ , welchen hier Gauss „Meridian-Konvergenz“ nennt (vgl. hiezu den Schluss dieses §, S. 465).

Fig. 3.

Wenn wir die Gleichung des Parallelkreis-Bildes *WAE* als Funktion zwischen den ebenen rechtwinkligen Coordinaten x und y aufstellen können, so brauchen wir nur noch $\frac{dx}{dy}$ zu bilden, um $\tan \gamma$ zu haben.

Um in diesem Sinne die Gleichung des Parallelkreises zu bilden, brauchen wir nur φ konstant zu denken, und λ allein veränderlich, d. h. wir leiten die Gleichungen (18) und (19) partiell nach λ ab, und erhalten damit:

$$\frac{dx}{d\lambda} = \lambda N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \quad (31)$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = N \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \quad (32)$$

Die Division von (31) und (32) giebt:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \left\{ \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi \cos^2 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \right\} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \right\} \\ \frac{dx}{dy} &= \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi \cos^2 \varphi (2 + 2 t^2 + 6 \eta^2 + 4 \eta^4) = \tan \gamma \end{aligned}$$

Nun ist nach der *arc tang*-Reihe § 28. S. 172:

$$\gamma = \tan \gamma - \frac{\tan^3 \gamma}{3}, \quad \text{wobei} \quad \frac{\tan^3 \gamma}{3} = \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi t^2$$

also mit dem vorhergehenden

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\lambda^3}{6} 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi (2 t^2)$$

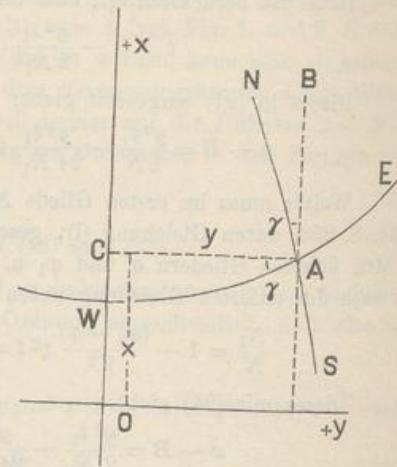
und alles zusammengenommen:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3 \eta^2 + 2 \eta^4) \quad (33)$$

Diese Gleichung ist anzuwenden, wenn ein Punkt durch φ und λ gegeben ist; wenn aber x und y als gegeben vorliegen, dann empfiehlt es sich, erstens λ in y auszudrücken und zweitens auch alles, was von φ abhängt, auf φ_1 , d. h. auf die Fußpunktsbreite zu reduzieren.

Für das erste haben wir von (20):

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi} - \frac{y^3}{6 N^3 \cos \varphi} (1 - t^2 + \eta^2)$$



Dieses in (33) eingesetzt gibt:

$$\gamma = \frac{y}{N} t + \frac{y^3 t}{6 N^3} (1 + t^2 + 5 \eta^2 + 4 \eta^4)$$

Weiter haben wir für t und N bereits die Gleichungen (23a) und (25), welche zusammen geben:

$$\frac{t}{N} = \frac{t_1}{N_1} \left(1 - \frac{y^2}{2 N_2} (1 + t^2 + \eta^2 + \eta^2 t^2) \right) \left(1 + \frac{y^2}{2 N^2} \eta^2 t^2 \right)$$

Dieses mit dem vorhergehenden vereinigt gibt endlich:

$$\gamma = \frac{y}{N_1} t_1 - \frac{y^3}{3 N_1^3} t_1 (1 + t_1^2 - \eta_1^2 - 2 \eta_1^4) \quad (34)$$

Die Zeichen N_1 und t_1 deuten an, dass diese Werte, z. B. $t_1 = \tan \varphi_1$, als Funktion der Fußpunktsbreite φ_1 zu nehmen sind, welche der vom Äquator an rektifizierten Meridianbogenlänge x entspricht. Auch in den höheren Gliedern der Formel (34) haben wir durchaus $t_1 \eta_1^2$ u. s. w. in diesem Sinne geschrieben, obgleich in der vorhergehenden Entwicklung die Unterscheidung von φ und φ_1 in den höheren Gliedern nicht eingehalten wurde, weil sie in der ohnehin zugelassenen Vernachlässigung der nächstfolgenden y^5 u. s. w. keine Konsequenz mehr hat.

Die Gleichung (34) stimmt innerhalb ihrer Ordnung mit Schreiber, Formel c S. 31, und vollständig mit der Formel c von Wittstein, S. XI, welche auch nur bis zu y^3 einschließlich geht.

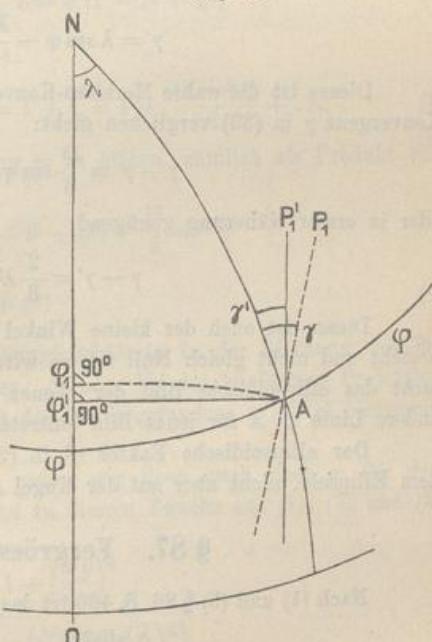
Wahre Meridian-Konvergenz.

Die Meridian-Konvergenz γ , wie sie im Anschluss an Fig. 3. S. 464 definiert wurde, ist von der besonderen Natur der vorliegenden Abbildungsart abhängig und entspricht nicht genau der Definition Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$ von Fig. 3. in § 60. S. 345, wie auch schon auf S. 346 bemerkt wurde.

Um auch die Meridian-Konvergenz in dem früheren Sinne $\alpha' - \alpha$ Fig. 3. S. 345 zu bestimmen, betrachten wir in Fig. 4. einen Punkt A mit der Breite φ und der Länge λ gegen den Anfangsmeridian NO , auf welchem in der Breite φ_1 eine geodätische Linie $\varphi_1' A$ rechtwinklig nach A abgeht, so dass man sagen kann, auf dem Ellipsoid sei von O bis φ_1' die Abscisse und von φ_1' bis A die Ordinate des Punktes A , und zwar Abscisse und Ordinate beide als geodätische Linien verstanden.

Ausser dem Punkte φ_1' nehmen wir noch auf dem Meridian ON einen Punkt φ_1 , von welchem ebenfalls rechtwinklig eine Linie nach A abgeht (in Fig. 4. punktiert gezeichnet); diese zweite Linie $\varphi_1 A$ ist aber nicht eine geodätische Linie, sondern eine sehr flach gekrümmte andere Linie, von welcher sich nachher ergeben wird, dass sie das Ellipsoid-Bild zu der geraden Ordinaten-Linie y des konformen Coordinatensystems ist.

Fig. 4.
Ellipsoid.



Wenn in A die zwei Tangentialrichtungen AP_1' und AP_1 rechtwinklig auf $A\varphi_1'$ und auf $A\varphi_1$ gezogen werden, so ist $NA P_1' = \gamma'$ die Meridian-Konvergenz zwischen φ_1' und A in dem gewöhnlichen Sinne von $\alpha' - \alpha$ in Fig. 3. S. 345.

Um diese wahre Meridian-Konvergenz γ' zu bestimmen, nehmen wir von den Reihenentwicklungen des früheren § 74. Gleichung (27) S. 396 bis zur dritten Ordnung mit $u = 0$ und $v = \frac{y}{N_1}$ und $t = \operatorname{tang} \varphi_1'$ für die Ausgangsbreite φ_1' :

$$\alpha' - \alpha = \gamma' = \frac{y}{N_1} \operatorname{tang} \varphi_1' - \frac{y^3}{6 N_1^3} \operatorname{tang} \varphi_1' (1 + 2 \operatorname{tang}^2 \varphi_1' + \eta_1^2) \quad (35)$$

Hiezu von (26) S. 395 mit denselben Substitutionen:

$$\lambda \cos \varphi_1' = \frac{y}{N_1} - \frac{y^3}{3 N_1^3} \operatorname{tang}^2 \varphi_1' \quad (36)$$

Also durch Division von (35) und (36):

$$\begin{aligned} \gamma' &= \lambda \sin \varphi_1' \left(1 - \frac{y^2}{6 N_1^2} (1 + \eta^2) \right) \\ \gamma' &= \lambda \sin \varphi_1' - \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi_1' \cos^2 \varphi_1' (1 + \eta^2) \end{aligned} \quad (37)$$

Zur Reduktion von der Fußpunktsbreite φ_1' auf die Punktbreite φ können wir als hinreichend die frühere Formel (17) § 55. S. 305 nehmen:

$$\varphi_1' = \varphi + \frac{V^2 \lambda^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\text{also } \sin \varphi_1' = \sin \varphi + \frac{V^2 \lambda^2}{2} \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

Dieses wird mit (37) verbunden, wobei $1 + \eta^2 V^2$ zu beachten ist, also:

$$\gamma' = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3 V^2}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (38)$$

Dieses ist die wahre Meridian-Konvergenz, welche mit der Gauss'schen Meridian-Konvergenz γ in (38) verglichen giebt:

$$\gamma - \gamma' = \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (2 \eta^2 + 2 \eta^4)$$

oder in erster Näherung genügend:

$$\gamma - \gamma' = \frac{2}{3} \lambda^3 \eta^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (39)$$

Dieses ist auch der kleine Winkel $P_1' A P_1$ in Fig. 4., und da dieser Winkel besteht und nicht gleich Null ist, so wird erkannt, dass die geodätische Linie $\varphi_1' A$ nicht das ellipsoidische Bild der ebenen Ordinate y sein kann, sondern dass eine andere Linie $\varphi_1 A$ für jenes Bild eintreten muss.

Der ellipsoidische Faktor η^2 in (37) zeigt, dass die Differenz $\gamma - \gamma'$ nur auf dem Ellipsoid, nicht aber auf der Kugel existiert.

§ 87. Vergrösserungsverhältnis.

Nach (1) und (5) § 86. S. 460 ist das Vergrösserungsverhältnis m bestimmt durch:

$$m^2 = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(M d\varphi)^2 + (N \varphi \cos d\lambda)^2}$$