Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 87. Vergrösserungsverhältnis

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Wenn in A die zwei Tangentialrichtungen $A\,P_1'$ und $A\,P_1$ rechtwinklig auf $A\,\varphi_1'$ und auf $A\,\varphi_1$ gezogen werden, so ist $N\,A\,P_1' = \gamma'$ die Meridian-Konvergenz zwischen φ_1' und A in dem gewöhnlichen Sinne von $\alpha' = \alpha$ in Fig. 3. S. 345.

Um diese wahre Meridian-Konvergenz γ' zu bestimmen, nehmen wir von den Reihenentwicklungen des früheren § 74. Gleichung (27) S. 396 bis zur dritten Ordnung mit $u = 0$ und $v = \frac{y}{N_1}$ und $t = tang\,\varphi_1'$ für die Ausgangsbreite φ_1':

$$\alpha' - \alpha = \gamma' = \frac{y}{N_1}\,tang\,\varphi_1' - \frac{y^3}{6\,N_1^3}\,tang\,\varphi_1'\,(1 + 2\,tang^2\,\varphi_1' + \eta_1^2) \tag{35}$$

Hiezu von (26) S. 395 mit denselben Substitutionen:

$$\lambda\,cos\,\varphi_1' = \frac{y}{N_1} - \frac{y^3}{3\,N_1^3}\,tang^2\,\varphi_1' \tag{36}$$

Also durch Division von (35) und (36):

$$\gamma' = \lambda\,sin\,\varphi_1'\left(1 - \frac{y^2}{6\,N_1^2}(1 + \eta^2)\right)$$

$$\gamma' = \lambda\,sin\,\varphi_1' - \frac{\lambda^3}{6}\,sin\,\varphi_1'\,cos^2\,\varphi_1'\,(1 + \eta^2) \tag{37}$$

Zur Reduktion von der Fusspunktsbreite φ_1' auf die Punktbreite φ können wir als hinreichend die frühere Formel (17) § 55. S. 305 nehmen:

$$\varphi_1' = \varphi + \frac{V^2\,\lambda^2}{2}\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi$$

also
$$sin\,\varphi_1' = sin\,\varphi + \frac{V^2\,\lambda^2}{2}\,sin\,\varphi\,cos^2\,\varphi$$

Dieses wird mit (37) verbunden, wobei $1 + \eta^2\ V^2$ zu beachten ist, also:

$$\gamma' = \lambda\,sin\,\varphi + \frac{\lambda^3\,V^2}{3}\,sin\,\varphi\,cos^2\,\varphi \tag{38}$$

Dieses ist die wahre Meridian-Konvergenz, welche mit der Gauss schen Meridian-Konvergenz γ in (33) verglichen giebt:

$$\gamma - \gamma' = \frac{\lambda^3}{3}\,sin\,\varphi\,cos^2\,\varphi\,(2\,\eta^2 + 2\,\eta^4)$$

oder in erster Näherung genügend:

$$\gamma - \gamma' = \frac{2}{3}\,\lambda^3\,\eta^2\,sin\,\varphi\,cos^2\,\varphi \tag{39}$$

Dieses ist auch der kleine Winkel $P_1'\,A\,P_1$ in Fig. 4., und da dieser Winkel besteht und nicht gleich Null ist, so wird erkannt, dass die geodätische Linie $\varphi_1'\,A$ *nicht* das ellipsoidische Bild der ebenen Ordinate y sein kann, sondern dass eine andere Linie $\varphi_1\,A$ für jenes Bild eintreten muss.

Der ellipsoidische Faktor η^2 in (37) zeigt, dass die Differenz $\gamma - \gamma'$ nur auf dem Ellipsoid, nicht aber auf der Kugel existiert.

§ 87. Vergrösserungsverhältnis.

Nach (1) und (5) § 86. S. 460 ist das Vergrösserungsverhältnis m bestimmt durch:

$$m^2 = \frac{d\,s^2}{d\,S^2} = \frac{d\,x^2 + d\,y^2}{(M\,d\,\varphi)^2 + (N\,\varphi\,cos\,d\,\lambda)^2}$$

$$m^2 = \frac{d\,y^2}{d\,\lambda^2} \frac{1 + \left(\frac{d\,x}{d\,y}\right)^2}{N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \left(\frac{M\,d\,\varphi}{N \cos \varphi\, d\,\lambda}\right)^2\right)} \tag{1}$$

Nach Fig. 1. und 2. § 86. S. 459 hat man in den rechtwinkligen Dreiecken:

$$\frac{d\,x}{d\,y} = cotg\,t \quad \text{und} \quad \frac{M\,d\,\varphi}{N \cos \varphi\, d\,\lambda} = cotg\,\alpha$$

Wo t der Richtungswinkel im ebenen System und α das Azimut auf dem Ellipsoid ist, damit wird (1):

$$m^2 = \frac{d\,y^2}{d\,\lambda^2} \frac{1 + cotg^2\,t}{N^2 \cos^2 \varphi\,(1 + cotg^2\,\alpha)}$$

$$m = \frac{d\,y}{d\,\lambda} \frac{1}{N \cos \varphi} \frac{\sin \alpha}{\sin t} \tag{2}$$

Wir betrachten nun besonders den Fall, dass $\alpha = 90°$ werde, d. h. dass der Ellipsoidbogen $d\,S$ auf einem Parallelkreis liege, was zur Folge hat, dass φ konstant ist und ferner, dass $t = 90° - \gamma$ wird, wenn γ die Meridian-Konvergenz ist, welche in Fig. 3. S. 464 konform abgebildet wird. Damit erhält man aus (2):

$$m = \frac{d\,y}{d\,\lambda} \frac{\sec \gamma}{N \cos \varphi} \tag{3}$$

Hiezu hat man aus (32) § 86. S. 464:

$$\frac{d\,y}{d\,\lambda} = N \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi\,(1 - t^2 + \eta^2)$$

$$\text{also} \quad \frac{d\,y}{d\,\lambda} \frac{1}{N \cos \varphi} = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi\,(1 - t^2 + \eta^2) \tag{4}$$

Ferner hat man aus (33) § 86. S. 464:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \lambda^3 \ldots \qquad \sec \gamma = 1 + \frac{\gamma^2}{2} = 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{2} + \ldots \tag{5}$$

Dieses genügt, um in erster Nährung m zu bilden, nämlich als Produkt von (4) und (5):

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi\,(1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi$$

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi\,(1 + \eta^2) \tag{6}$$

Das ist zunächst nur das Vergrösserungsverhältnis in der Richtung des Parallelkreises, also rechtwinklig zum Meridian; da aber bei der konformen Projektion m nach allen Seiten gleich ist, können wir das in (6) gefundene m sofort allgemein gelten lassen.

Um übrigens eine Probe zu haben, wollen wir doch auch noch m für den Meridian besonders bestimmen, und schreiben zu diesem Zwecke aus (1), (4) und (5) § 86. S. 460:

$$m^2 = \frac{d\,x^2}{d\,\varphi^2} \frac{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{M^2 \left(1 + \left(\frac{N \cos \varphi\, d\,\lambda}{M\,d\,\varphi}\right)^2\right)}$$

Gehen wir auf den Meridian über, so wird hier nach Fig. 3. § 86. S. 464

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\,tang\,\gamma \quad \text{und ferner} \quad d\,\lambda = 0,$$

$$\text{also} \qquad m = \left(\frac{d\,x}{d\,\varphi}\right)\frac{sec\,\varphi}{M}$$

Um $\left(\frac{d\,x}{d\,\varphi}\right)$ zu bilden, hat man von (18) § 86. S. 462:

$$x = B + \frac{\lambda^2}{2}\,N\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi + \lambda^4 \ldots$$

$$\frac{d\,x}{d\,\varphi} = M + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{d\,N}{d\,\varphi}\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi + N\,cos^2\,\varphi - N\,sin^2\,\varphi\right)$$

Dabei ist nach § 34. Gleichung (e) S. 208:

$$N = \frac{c}{V}\;, \qquad \frac{d\,N}{d\,\varphi} = \frac{c}{V^3}\,\eta^2\,t$$

$$\text{also} \qquad \frac{d\,x}{d\,\varphi} = M + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{c}{V^3}\,\eta^2\,sin^2\,\varphi + \frac{c}{V}\,cos^2\,\varphi - \frac{c}{V}\,sin^2\,\varphi\right)$$

$$= M + \frac{c}{V^3}\,\frac{\lambda^2}{2}\,cos^2\,\varphi\left(1 - t^2 + \eta^2\right), \text{ dabei ist } M = \frac{c}{V^3}\text{, also:}$$

$$\frac{d\,x}{d\,\varphi}\,\frac{1}{M} = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\,cos^2\,\varphi\left(1 - t^2 + \eta^2\right)$$

Das ist dasselbe wie bei (4), also muss auch die Weiterrechnung für m in der Meridianrichtung denselben Wert geben wie früher bei (4)—(6) in der Parallelkreisrichtung. Es ist also die Formel (6) allgemein giltig, in der Meridianrichtung, rechtwinklig dazu, und in allen Richtungen.

Um die Formel für m, welche in (6) nur bis λ^2 geht, auch noch bis λ^4 zu entwickeln, müssen wir auf (17) § 86. S. 461 zurückgehen und von dort entnehmen:

$$\frac{d\,y}{d\,\lambda}\,\frac{1}{N\,cos\,\varphi} = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\,cos^2\,\varphi\left(1 - t^2 + \eta^2\right) + \frac{\lambda^4}{24}\,cos^4\,\varphi\,(5 - 18\,t^2 + t^4) \qquad (7)$$

und von (33) § 86. S. 464:

$$\gamma = \lambda\,sin\,\varphi + \frac{\lambda^3}{3}\,sin\,\varphi\,cos^2\,\varphi\,(1 + 3\,\eta^2 + 2\,\eta^4)$$

$$sec\,\gamma = 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{5}{24}\,\gamma^4 = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\,sin^2\,\varphi + \frac{\lambda^4}{24}\,sin^2\,\varphi\,cos^2\,\varphi\,(8 + 5\,t^2) \qquad (8)$$

Wenn man diese (8) und (7) nach Anleitung von (3) multipliziert, so erhält man:

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\,cos^2\,\varphi\,(1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4}{24}\,cos^4\,\varphi\,(5 - 4\,t^2) \qquad (9)$$

Das ist die Weiterentwicklung von (6) bis auf λ^4 einschliesslich, aber mit Weglassung aller Glieder η^2 u. s. w. in den Coëfficienten von λ^4. Innerhalb dieser Vernachlässigung stimmt unsere Formel (9) auch mit der entsprechenden Gleichung von Schreiber S. 36. (wie immer nach goniometrischer Umformung).

Es ist auch leicht, innerhalb der angenommenen Genauigkeit die Formel (9) auf y zu reduzieren, denn es ist nach (20) § 86. S. 462:

$$\lambda = \frac{y}{N\,cos\,\varphi} - \frac{y^3}{6\,N^3\,cos\,\varphi}\,(1 - t^2 + \ldots)$$

$$\lambda^2 = \frac{y^2}{N^2\,cos^2\,\varphi} - \frac{y^4}{3\,N^4\,cos^2\,\varphi}\,(1 - t^2 + \ldots)$$

Damit wird (9):

$$m = 1 + \frac{y^2}{2\,N^2}(1+\eta^2) + \frac{y^4}{24\,N^4}(1+\eta^2 \ldots)$$

Es ist aber $N = \frac{c}{V}$ und $r = \frac{c}{V^2}$ also $\frac{1}{N^2} = \frac{V^2}{r^2} = \frac{1+\eta^2}{r^2}$,

$$\text{also} \quad m = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} + \frac{y^4}{24\,r^4} \tag{10}$$

Der Nenner r^4 im zweiten Gliede gilt nur näherungsweise, doch kann man ihn wohl annehmen, da wir ja ohnehin alle $1+\eta^2 \ldots$ im zweiten Gliede vernachlässigt haben. Darum ist auch inbegriffen, dass bei dem Übergang von λ auf y in N nicht mehr unterschieden wurde, ob es zu φ oder zu φ_1 gehören soll, d. h. es ist die Reduktion (25) § 86. S. 463 nicht mehr angebracht worden; und innerhalb der ersten Näherung haben wir nun in (10) wieder dieselbe Formel wie früher in der sphärischen Entwicklung von § 50. Gleichung (10) S. 281.

Entfernungs-Reduktion.

Wenn die wahre Länge einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid $= S$ und deren ebenes Abbild $= s$ ist und m das Vergrösserungsverhältnis in differentialem Sinne, so ist:

$$S = \int \frac{1}{m}\, ds \tag{11}$$

und hiezu ist der Wert von m aus der Formel (10) einzusetzen; wir wollen aber dabei das Glied mit r^4 nicht mitnehmen, weil eine hierauf sich erstreckende Integration schon früher in § 85. gemacht worden ist. Es wird also zunächst nur genommen:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2\,r^2} \tag{12}$$

und insoweit könnte es scheinen, als ob die einfache Entwicklung von § 50. wieder ihre Stelle fände, allein jene Entwicklung war nur sphärisch mit konstantem r, während wir nun den mittleren Krümmungs-Halbmesser r nach den Ellipsoidgesetzen veränderlich annehmen müssen.

Es kommt dabei wieder die Änderung von V in Frage, nämlich nach (25) § 86. S. 463:

$$\frac{N_1}{N} = \frac{V}{V_1} = 1 - \frac{(\varphi - \varphi_1)}{V^2}\,\eta^2 t \quad \text{oder} \quad \frac{V^4}{V_1^{\,4}} = 1 - \frac{4\,(\varphi - \varphi_1)}{V^2}\,\eta^2 t$$

und da $\frac{1}{r^2} = \frac{V^4}{c^2}$, hat man auch:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^{\,2}}\left(1 - \frac{4\,(\varphi - \varphi_1)}{V^2}\,\eta^2 t\right)$$

Es ist aber in erster Näherung:

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{x - x_1}{M}$$

also, ebenfalls in erster Näherung:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^{\,2}}\left(1 - \frac{4\,(x - x_1)}{r}\,\eta^2 t\right) \tag{13}$$

Dabei ist im zweiten Glied einfach $V^2 M = N = r$ gesetzt, wofür auch r_1 geschrieben werden kann.

Aus (12) und (13) hat man also:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2\,r_1^2}\left(1 - \frac{4\,(x - x_1)}{r}\,\eta^2\,t\right) \tag{14}$$

Dieses m gehöre zu einem Punkte mit den Coordinaten $x\,y$, an irgend welcher Stelle des Bogens $A\,C\,B$ von Fig. 2. § 85. S. 453, welcher als Abbild einer geodätischen Linie S auftritt. Wenn man nur bis zur 3ten Ordnung einschliesslich rechnet, so kann man sowohl die Gerade $A\,B$ als auch den Bogen $A\,s'\,B$ als Abbildlänge s der geodätischen Linie S annehmen, denn die Unterscheidung zwischen Bogen $A\,C\,B$ und Sehne $A\,B$ kam erst bei der 4ten Ordnung in Betracht, wie wir in § 85. bei (23) S. 455 gesehen haben.

Die Kurve $A\,B$ in Fig. 2. § 85. S. 455 sei bestimmt durch eine Gleichung zwischen l und z, indem ein schiefes Coordinatensystem gelegt wird mit $A\,B$ als Axe der l und einer Axe der z, welche gegen $A\,B$ um $+\,90°$ gedreht ist. Indessen brauchen wir innerhalb der angegebenen 3ten Ordnung die z selbst gar nicht zu berücksichtigen, es genügt zunächst zu setzen (als Abkürzung von (12) § 85. S. 453):

$$x = x_1 + l\cos t_1 \qquad y = y_1 + l\sin t_1 \tag{15}$$

also wird (14):

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{(y_1 + l\sin t_1)^2}{2\,r_1^2}\left(1 - \frac{4\,l\cos t_1}{r}\,\eta^2\,t\right) \tag{16}$$

Es ist zu bemerken, dass das letzte t hier wie immer die Bedeutung $t = tang\,\varphi$ hat, während t_1 der Richtungswinkel von $A\,B$ im System $x\,y$ ist.

Die Gleichung (16) wird nach Potenzen von l geordnet, und soll dabei geben:

$$\frac{1}{m} = \alpha + \beta\,l + \gamma\,l^2 + \delta\,l^3 \tag{17}$$

Dann haben die Coëfficienten $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ folgende Bedeutungen:

$$\alpha = 1 - \frac{y_1^2}{2\,r_1^2} \tag{18}$$

$$\beta = -\frac{y_1\sin t_1}{r_1^2} + \frac{2\,y_1^2\cos t_1}{r^3}\,\eta^2\,t \tag{19}$$

$$\gamma = -\frac{\sin^2 t_1}{2\,r_1^2} + \frac{4\,y_1\sin t_1\cos t_1}{r^3}\,\eta^2\,t \tag{20}$$

$$\delta = + \frac{2\sin^2 t_1\cos t_1}{r^3}\,\eta^2\,t \tag{21}$$

Wenn man die Funktion (17) entsprechend (11) integriert und zwar zwischen den Grenzen $l = 0$ und $l = s$, so bekommt man:

$$\frac{S}{s} = \alpha + \frac{\beta\,s}{2} + \gamma\,\frac{s^2}{3} + \frac{\delta\,s^3}{4} \tag{22}$$

Andererseits führen wir drei Werte von $\frac{1}{m}$ ein, für den Anfang, für die Mitte und für den Endpunkt der Linie $A\,B$, nämlich:

$$l = 0 \text{ soll geben } \frac{1}{m_1} = \alpha$$

$$l = \frac{s}{2} \quad " \quad " \quad \frac{1}{m_0} = \alpha + \frac{\beta\,s}{2} + \gamma\,\frac{s^2}{4} + \delta\,\frac{s^3}{8}$$

$$l = s \quad " \quad " \quad \frac{1}{m_2} = \alpha + \beta\,s + \gamma\,s^2 + \delta\,s^3$$

Dieses mit (22) verglichen wird geben:

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_o} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{23}$$

Wenn man also die drei verschiedenen $\frac{1}{m}$ nach der Funktion (12) ausrechnet, und zwar nicht bloss für die drei verschiedenen y, sondern auch mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von r, entsprechend den geographischen Breiten φ_1, φ_0, φ_2 oder den Abscissen x_0, x_1, x_2, so bekommt man nach (23) die richtige Entfernungs-Reduktion, ohne dass man dabei die Coëfficienten α, β, γ, δ gebraucht hätte; es hat genügt einzusehen, dass sich $\frac{1}{m}$ durch eine Funktion 3ten Grades von der Form (17) ausdrücken lässt.

Trotzdem wollen wir doch auch noch den Ausdruck (22) mit Einsetzung der Coëfficientenwerte α, β, γ, δ nach (18)—(21) bilden, und zwar mit Umsetzung $s \sin t_1 = y_2 - y_1$ und $s \cos t_1 = x_2 - x_1$, wodurch man erhält:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{6\,r_1^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) + \frac{\eta^2 t}{6\,r^3}(x_2 - x_1)(y_1^2 + 2\,y_1 y_2 + 3\,y_2^2) \tag{24}$$

Hier kann man noch r_1 auf den Mittelwert r_0 reduzieren, nach (13):

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r_0^2}\left(1 + \frac{4\,(x - x_1)}{r}\,\eta^2\,t\right)$$

Dieses mit (24) verbunden giebt:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{6\,r_0^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) - \frac{\eta^2 t}{6\,r^2}(x_2 - x_1)(y_2^2 - y_1^2) \tag{25}$$

Hier gilt r_0 als mittlerer Krümmungs-Halbmesser für die mittlere Breite φ_0 oder für die mittlere Abscisse x_o der betrachteten Linie $A\,B$.

Die Gleichung (25) in logarithmischer Form geschrieben wird:

$$\log S - \log s = -\frac{\mu}{6\,r_0^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) - \frac{\mu\,\eta^2\,t}{6\,r^3}(x_2 - x_1)(y_2^2 - y_1^2) \tag{26}$$

Dieses stimmt mit Schreiber S. 49, wenn man wie immer die gegenseitigen Zeichenumformungen macht. In erster Näherung stimmt dieses auch mit dem früheren (12)—(14) § 50. S. 282.

§ 88. Richtungs-Reduktion.

Um das Krümmungs-Differential zu bestimmen, betrachten wir in Fig. 1. und Fig. 2. S. 472 zwei benachbarte Punkte, welche auf dem Ellipsoid durch einen kleinen Bogen $d\,S$ und in der Ebene durch $d\,s$ verbunden sind, und untersuchen die verschiedenen dabei in Betracht kommenden Richtungen und Winkel, unter Zuziehung dessen, was schon in § 86. bei Fig. 4. S. 465 über die beiden Meridian-Konvergenzen γ' auf dem Ellipsoid und γ in der Ebene gesagt worden ist.

Dann wird man aus Fig. 1. alsbald die folgenden Gleichungen herauslesen können:

$$T_1 = \alpha_1 - \gamma_1 \qquad T_2 = \alpha_2 - \gamma_2$$

$$T_1 - T_2 = (\gamma_2 - \gamma_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$T_1 - T_2 = (\gamma_2' - \gamma_1') + \big((\gamma_2 - \gamma_2') - (\gamma_1 - \gamma_1')\big) - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

oder als Differential:

$$d\,T = d\,\gamma' + d\,(\gamma - \gamma') - d\,\alpha \tag{1}$$