



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 89. Vorteile der konformen Koordinaten

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

Deshalb nach (13) § 87. S. 469:

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r_{12}^2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{(x_2 - x_1)}{r} \eta^2 t \right) \quad (19)$$

$$\frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{r_{21}^2} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x_2 - x_1}{r} \eta_2 t \right)$$

Damit gehen (17) und (18) über in:

$$\delta_1 = \frac{x_2 - x_1}{6r_{12}^2} (2y_1 + y_2) - \frac{\eta^2 t}{9r^3} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) + \frac{\eta^2 t}{6r^3} (y_2 - y_1) (3y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2) \quad (20)$$

$$\delta_2 = \frac{x_2 - x_1}{6r_{21}^2} (y_1 + 2y_2) + \frac{\eta^2 t}{9r^3} (x_2 - x_1)^2 (y_1 - y_2) + \frac{\eta^2 t}{6r^3} (y_2 - y_1) (y_1^2 + 2y_1 y_2 + 3y_2^2) \quad (21)$$

Diese Formeln stimmen mit Schreiber, S. 46, wenn man die Bezeichnungsumänderungen berücksichtigt; und in erster Näherung haben wir auch Übereinstimmung mit den früheren (31)–(32) § 50. S. 284.

Schlussbetrachtung.

Alle Formeln, welche in den vorstehenden §§ 86.—88. gefunden worden sind, gehen in die entsprechenden früheren Formeln von § 58. und § 50. über, wenn man die höheren Glieder weglässt, wie wir an den betreffenden Stellen bereits angegeben haben. Insbesondere sind die Formeln von § 87. und 88. bei Weglassung aller η^2 lediglich die sphärischen Formeln von § 50; und wenn man sich damit begnügen will, so kann man auch die viel einfacheren sphärischen Entwicklungen von § 50. an Stelle der umständlichen §§ 87. und 88. treten lassen.

Für kleine Geltungsbereiche, etwa von der Grösse der vierzig preussischen Katastersysteme, würden in der That die früheren Formeln von § 50. und § 58. mit demselben Rechte angewendet werden können, wie die ebenfalls nicht weiter getriebenen sogenannten Soldner'schen Formeln.

Ein Land mit praktischer Anwendung der Gauss'schen konformen Theorie giebt es zur Zeit in Deutschland nicht (nachdem das Hannoverische System aufgegeben worden ist vgl. S. 329) und deswegen wollen wir auch Zahlenanwendungen zu den §§ 86.—88. hier unterlassen.

§ 89. Vorteile der konformen Koordinaten.

Nachdem wir schon in § 52. eine Vergleichung der kongruenten (Soldner'schen) und der konformen Koordinaten angestellt haben, welche am Schlusse daselbst S. 297 in allem Wesentlichen zu Gunsten der konformen Koordinaten ausgefallen ist, ist es angezeigt, nochmals hierauf zurückzukommen.

Dabei sei auch ein Wort über die Bezeichnung „kongruente Koordinaten“ eingeschaltet. Wir wollen unter kongruenter geodätischer ebener Abbildung einer auf einer krummen Fläche gezogenen Linie diejenige ebene Abbildungslinie verstehen, welche ein Landmesser auf der krummen Fläche mit Theodolit und Messlatten messend, nach gewöhnlichen Feldmess- und Rechenregeln auf einer Zeichenebene herstellen würde (abgesehen von dem Verjüngungsmaassstabe der Zeichnung). Wir bedienen uns dabei wie bei der mathematischen Definition der geodätischen Linie (§ 68. S. 373) der Feldmessenoperationen als Veranschaulichung einer mathematischen Begriffsbestimmung, und wir finden hierauf leicht den Satz, dass die geodätisch kongruente ebene Abbildung einer geodätischen Linie immer eine Gerade der Ebene ist, deren lineare Grösse der rektifizierten geodätischen Linie gleich ist. Die „geodätische Krümmung“ ist in diesem Falle gleich Null (vgl. hiezu § 107).

Die Ordinaten η und η' , der ebenen Soldner'schen Projektion Fig. 1. § 46. S. 275 sind in diesem Sinne geodätisch kongruente Abbildungen der sphärischen Ordinaten η und η' von Fig. 1 § 46. S. 257,

wie auch die sphärischen Abscissen x und z , von Fig. 1, S. 257 geodätisch kongruent abgebildet werden (während für irgend eine andere Linie z. B. $AB = s$ in Fig. 1, S. 257 die Abbildung durchaus nicht mehr geodätisch kongruent ist).

Aus diesen Gründen haben wir die sogenannte Soldnersche Koordinaten-Projektion, um eine kurze mathematische Benennung zu haben, „kongruente“ Projektion genannt im Gegensatz zu der Gauss'schen „konformen Projektion“.

Zuerst nochmals auf das allgemeine Prinzip der Konformität zurückkommend, nach welchem zwei *kleine* Dreiecke im Urbild und im Abbild einander ähnlich sind (vgl. § 50, S. 279) wollen wir unterscheiden, ob die Änderung des Massstabsverhältnisses m von Punkt zu Punkt so beträchtlich ist, dass auf ein und demselben Kartenblatt die Veränderlichkeit bemerklich wird. Nehmen wir z. B. das bekannte stereographische Halbkugelbild der Erde, so hat dasselbe am Rande doppelt so grossen Massstab als in der Mitte; und deswegen ist der Vorteil der Konformität in diesem Falle nicht unbedingt Ausschlag gebend, denn wenn man doch einmal auf einem Blatte verschiedene Massstäbe an verschiedenen Punkten haben muss, ist die Verschiedenheit des Massstabes in einem Punkte nach verschiedenen Richtungen auch nicht mehr so sehr schlimm.

Andererseits betrachten wir den Fall, dass eine grosse Karte einheitlicher konformer Projektion in so viele einzelne Blätter zerschnitten wird, dass innerhalb des einzelnen Blattes der Massstab als konstant gelten kann; und dann tritt die Konformität in ihr schönstes Licht.

Diesen Fall haben wir aber bei unseren Katasterkarten; setzen wir z. B. als sehr gross $y_1 = 99000^m$ und $y_2 = 100\,000^m$, so wird entsprechend (vgl. § 49, S. 276):

$$m_1 = 1 + \frac{y_1^2}{2r^2} = 1,000\,1203 \quad m_2 = 1 + \frac{y_2^2}{2r^2} = 1,000\,1228$$

$$m_1 - 1 = 0,1203^{mm} \text{ für } 1^m \quad m_2 - 1 = 0,1228^{mm} \text{ für } 1^m$$

Diese zwei Werte sind so nahe einander gleich, dass man ihren Mittelwert, $0,1215^{mm}$ für 1^m , als konstant für das ganze Blatt annehmen kann, dass man also mit *einem* Massstabe für das ganze Blatt ausreicht; dieses gilt für konforme Koordinaten.

Dagegen bei Soldnerschen Koordinaten, bei welchen die Formel (4) S. 275 oder (4) S. 292 gilt, kommt man mit *einem* Massstabe für jedes Kartenblatt nicht aus, sondern man würde in die unangenehme Lage versetzt, eine ganze *Windrose* von Massstäben auf die Karte zu zeichnen, bei denen für jeden einzelnen das Vergrösserungsverhältnis nach $\cos^2 \alpha$ berücksichtigt werden muss.

Durch einen kleinen Kunstgriff kann man die Maximalverzerrung leicht auf die Hälfte ihres Wertes herunterbringen, indem man einen Mittelwert als konstante Verzerrung einführt, etwo so, dass $y = b$ dem Maximalwert m_1 und $y = c$ dem Mittelwert m_0 entspricht, also:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2r^2}, \quad m_0 = 1 + \frac{c^2}{2r^2}, \quad m_1 = 1 + \frac{b^2}{2r^2}, \quad \frac{m}{m_0} = 1 + \frac{y^2 - c^2}{2r^2}$$

Nimmt man $c^2 = \frac{b^2}{2}$, so wird für $y = 0$ und $y = b$:

$$\text{Min} \frac{m}{m_0} = 1 - \frac{c^2}{r^2} = 1 - \frac{b^2}{4r^2} \quad \text{und} \quad \text{Max} \frac{m}{m_0} = 1 + \frac{c^2}{2r^2} = 1 + \frac{b^2}{4r^2}$$

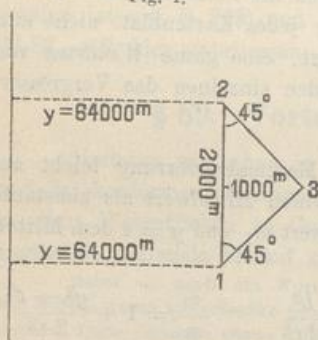
Man kann auch c^2 anders annehmen, z. B. so dass die Quadratsumme aller $\left(\frac{m}{m_0} - 1\right)^2$, als Integral aufgefasst, ein Minimum wird, was eintritt mit $c^2 : b^2 = 1 : 3$.

Solche und ähnliche Betrachtungen, für konforme und für Soldnersche Koordinaten haben wir angestellt in „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 249—252, worauf hier verwiesen werden mag.

Die Flächenverzerrungen, von welchen auch schon in § 52. S. 293 gesprochen wurde, sind in der Soldnerschen Projektion im allgemeinen halb so gross als bei der konformen Projektion, und dieser einzige Vorteil ist von Anhängern der Soldnerschen Projektion lebhaft hervorgehoben worden, jedoch ist dazu folgende Überlegung zu machen:

Wenn z. B. bei der preussischen Ordinatenengrenze $y = 64\,000^m$ die Flächenverzerrung 1:20000 in Soldnerscher Projektion beträgt, und 1:10000 in konformer Gausscher Projektion, so ist das in beiden Fällen unschädlich neben den Messungsfehlern; z. B. auf 1^m macht jenes 1:10000 nur 1^m , während nach preussischer Anweisung die zulässige Abweichung zweier Bestimmungen hierfür 80^m oder der mittlere Fehler einer Bestimmung etwa $\frac{80}{3\sqrt{2}} = \text{rund } 20^m$ beträgt, d. h. das 20 fache des Verzerrungsfehlers. Nimmt man grössere Flächen, etwa 1^m , so kann allerdings scheinbar der von der Projektionsverzerrung herrührende Flächenfehler an den Messungsfehler heranreichen, aber dann ist es zunächst ziemlich gleichgiltig, ob dieses im Verhältnis etwa 1:8 oder 1:4 stattfindet; zweitens aber werden grosse Flächen nicht selbständig gemessen, sondern sie werden auf irgend welchen, z. B. polygonometrischen, Wegen aus den Netzkoordinaten abgeleitet und nehmen von dort die Netzverzerrungsfehler als unschädlich mit in sich auf, gerade wie auch die Höhenreduktionen (vgl. S. 295), welche gewöhnlich auch nicht besonders berücksichtigt werden. Es ist hier viel richtiger, dass alle Netzproben genügend in sich selbst stimmen, als dass die Netzverzerrung als ganzes mit in Rechnung gebracht wird, was übrigens auch ungehindert geschehen könnte, sowohl in der Soldnerschen als in der konformen Projektion.

Fig. 1.



Übergehend zur Triangulierung betrachten wir mit Fig. 1 ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck, dessen Hypotenuse parallel der x -Axe des Koordinatensystems liegt mit $y_1 = y_2 = +64\,000^m$, und mit der Seite $1.2 = 2\,000^m$. Der dritte Punkt 3. hat dann $y_3 = +65\,000^m$.

Dieses sind Naturmasse auf der Kugel ohne Rücksicht auf ebene Kartenprojektion, und es folgen daraus die drei Dreieckswinkel, da das Dreieck hinreichend als eben berechnet werden kann, so:

Winkel 1.	Winkel 2.	Winkel 3.	(1)
$45^\circ 0' 0,00''$	$45^\circ 0' 0,00''$	$90^\circ 0' 0,00''$	

Wenn man eine Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$ annimmt, so hat man nach § 50. S. 286:

$$\log \frac{1}{2r^2} = 6.089\,183, \quad \log \frac{1}{6r^2} = 5.612\,062 \quad \text{und} \quad \log \frac{\rho}{6r^2} = 0.926\,487$$

und damit werden die Koordinaten in Soldnerscher und in konformer Projektion berechnet nach (7) § 49. S. 276 und nach (9) § 50. S. 281, wie folgt:

I. Projektion Soldner, kongruent:

Punkt 1.	$y_1 = + 64000^m$	$x_1 = + 0,0000^m$	$\tan(1,3) = \frac{1000,0000}{1000,0503}$ $(1,3) = 44^\circ 59' 54,813''$ $1.3 = 1414,2491^m$
" 2.	$y_2 = + 64000$	$x_2 = + 2000,1006$	
" 3.	$y_3 = + 65000$	$x_3 = + 1000,0503$	
	$y_3 - y_1 = + 10000$	$x_3 - x_1 = + 2000,1006$	
	$y_2 - y_1 = + 0$	$x_2 - x_1 = + 1000,0503$	

Die Winkel des ebenen geradlinigen Dreiecks in der Soldner'schen Projektion ergeben sich hieraus:

Winkel 1.	Winkel 2.	Winkel 3.	
$44^\circ 59' 54,813''$	$44^\circ 59' 54,813''$	$90^\circ 0' 10,374''$	(2)
Winkelsumme = $180^\circ 0' 0,000''$			

II. Projektion Gauss, konform.

Punkt 1.	$Y_1 = + 64001,0730$	$x_1 = + 0,0000$	$\tan(1,3) = \frac{1000,0511}{1000,0503}$ Richtungswinkel $(1,3) = 45^\circ 0' 0,082''$ Entfernung $1.3 = 1414,2853^m$
" 2.	$Y_2 = + 64001,0730$	$x_2 = + 2000,1006$	
" 3.	$Y_3 = + 65001,1241$	$x_3 = + 1000,0503$	
	$Y_3 - Y_1 = + 1000,0511$	$x_3 - x_1 = + 1000,0503$	
	$Y_2 - Y_1 = + 0,0000$	$x_2 - x_1 = + 2000,1006$	

Es sind also die Winkel des ebenen geradlinigen Dreiecks in der Gauss'schen konformen Projektion:

Winkel 1.	Winkel 2.	Winkel 3.	
$45^\circ 0' 0,082''$	$45^\circ 0' 0,082''$	$89^\circ 59' 59,836''$	(3)
Winkelsumme = $180^\circ 0' 0,000''$			

Die Richtungsreduktionen nach den Formeln (6) und (7) § 52. S. 294 werden für die Richtung (1,2):

$$\text{Soldner } T_{12} - t_{12} = + 0,163'' + 5,268'' = + 5,431''$$

$$\text{Gauss } T_{12} - t_{12} = + 0,163''$$

Dabei bezieht sich $0,163''$ auf die der Dreiecksseite durch die Projektion erteilte Krümmung, welche in beiden Projektionen gemeinsam ist und der zweite Teil $5,268''$ ist von der eigentümlich schädlichen Soldner'schen einseitigen Verzerrung herührend. Wir wollen diese Reduktionen $T - t$ hier nicht weiter verfolgen. (Bei Soldner'scher Projektion wären dabei die früher in Fig. 4. § 50. S. 278 behandelten Verhältnisse zu berücksichtigen).

Es ist uns hier vielmehr um die Betrachtung der ebenen geradlinigen Dreiecke in beiden Projektionen zu thun, welche durch die Dreieckswinkel (2) und (3) im Vergleich mit (1) genügend charakterisiert sind. Während in der konformen Projektion die grösste Winkelverzerrung $0,2''$ beträgt, steigt diese Verzerrung auf $10,4''$ in der Soldner'schen Projektion, und damit ist der grosse Schaden der letzteren, d. h. der Soldner'schen Projektion für Kleintriangulierung und Polygonzugsmessung deutlich vor Augen gelegt.

Der Mecklenburgische Kammeringenieur Vogeler, welcher die Vorteile der konformen Projektion in seinem Lande besitzt, hat in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 260—261 die Vergleichung so zusammengefasst:

Bei der konformen Projektion in Mecklenburg kann die Triangulierung III.—IV.

Ordnung ohne alle Reduktionen $\frac{1}{r^2}$ u. s. w. ausgeführt werden, und zwar bis zu 100^{km}

Entfernung von der Hauptaxe, es sind hierbei Winkelverzerrungen von grösseren Beträgen als etwa 1"—2" nicht zu befürchten.

Dagegen bei dem Soldnerschen System werden alle Winkel III.—IV. Ordnung bis herunter zu den Polygonzugswinkeln durch Verzerrungen von 5"—10" entsteht, wenn man die Systemgrenze von 60000^m vom Meridian erreicht, oder um ein geringes überschreitet.

Die nachstehende Tabelle lässt alle Vorzüge der konformen Gauss'schen Projektion und die Nachteile, die die Soldnerschen Koordinaten mit sich bringen, klar erkennen. Dabei ist für die Mittelbreite 50° nach S. 286 $\log \frac{\rho}{6r^2} = 0.92649$:

$T - t$ nach den Formeln (7) und (6) § 52. S. 294.

$\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$	$y_1 = 30\,000^m$		$y_1 = 40\,000^m$		$y_1 = 60\,000^m$		$y_1 = 80\,000^m$		$y_1 = 100\,000^m$	
	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner
50 ^m	0,0	1,1	0,0	2,0	0,0	4,6	0,0	8,1	0,0	12,7
100 ^m	0,0	1,2	0,0	2,0	0,0	4,6	0,0	8,1	0,0	12,7
500 ^m	0,0	1,2	0,1	2,1	0,1	4,7	0,1	8,2	0,1	12,9
1000 ^m	0,1	1,3	0,1	2,2	0,2	4,8	0,2	8,4	0,3	13,0
5000 ^m	0,4	1,7	0,5	2,8	0,8	5,7	1,0	9,6	1,3	14,0
10000 ^m	0,8	2,4	1,1	3,7	1,6	7,0	2,1	11,3	2,6	16,6
20000 ^m	1,9	3,9	2,4	5,6	3,4	9,6	4,4	14,7	5,4	20,8

Hier fällt zuerst in die Augen, dass bei abnehmender Entfernung die Richtungsreduktionen bei der konformen Gauss'schen Projektion verschwinden, bei der Soldnerschen Projektion aber *nicht*.

Ferner geht aus dieser Übersicht hervor, dass eine ebene Kleintriangulierung mit einer Genauigkeit von $\pm 2'$ bis $3'$, welche den heutigen Instrumenten entspricht und durchaus wünschenswert ist, bei der Soldner'schen Projektion schon von $y = 40000^m$ an zur inneren Unmöglichkeit wird. Die Soldner'schen Katastersysteme müssten auf 30 bis 40^{km} Abstand von der Hauptaxe beschränkt werden, wenn sie den konformen Koordinaten mit einem Geltungsbereiche von 80 bis 100^{km} Abstand vom Meridian das Gleichgewicht halten sollten.

In Bayern werden daher nach einer Mitteilung von Franke in „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 332 schon von $y = 20^m$ an die sphärischen Korrektionsglieder der Soldner'schen Formeln berücksichtigt und zwar mit graphischen Hilfsmitteln, die wir schon in § 46, S. 263 kurz erwähnt haben, und so bleibt die Bayerische Kleintriangulierung immer noch innerhalb 1"—2" richtig, während z. B. im Preussischen Kataster mit $y = 60^m$ ohne sphärische Korrekturen sich Winkelverzerrungen einstellen, welche die Messungsfehler guter Theodolite bereits merklich übersteigen, und zum mindesten als inkonsequent bezeichnet werden müssen.

Eine Triangulierungs-Betrachtung mag noch auf die Centrierungen bei excentrischen Triangulierungspunkten Bezug nehmen.

Wenn mit $y = 64^{\text{km}}$ im Soldnerschen System *eben* trianguliert wird, so werden süd-nördliche Verschiebungen von 5^{cm} auf 1^{km} vernachlässigt, oder z. B. 15^{cm} auf 3^{km} .

Es ist das ähnlich wie wenn ein Trigonometer bei Turm-Centrierungen oder dergl. bei rund 4^{km} Zielweite in nordwestlicher Richtung eine süd-nördliche Excentricität von 15^{cm} vernachlässigen wollte, während er gleichzeitig sich abmühte, seine Winkel am Theodolit auf wenige Sekunden genau zu messen; — denselben Fehler begehen die Katastervermessungen, welche bei Soldnerschen Coordinaten bis $y = 64^{\text{km}}$ eben triangulieren.

Eine letzte Betrachtung mag sich noch auf Polygonmessungen beziehen, welche bei Soldnerschen Coordinaten mit $y = 64^{\text{km}}$ auch schon mehr Verzerrungen erleiden als bei genauen Messungen, z. B. bei einigermaßen feinen Stadtvermessungszügen zulässig ist. Die Polygonwinkel erleiden im Soldnerschen Systeme nach der Tabelle S. 478 Verzerrungen ganz unabhängig von der Streckenlänge bezw. Zielweite, welche bei Zügen zu rund 50^{m} — 150^{m} angenommen werden mag. Nimmt man $y_2 - y_1 = x_2 - x_1 = 100^{\text{m}}$ oder $= 50^{\text{m}}$, so entsteht bei $y = 60^{\text{km}}$ eine maximale Richtungsreduktion von $4,6''$ also eine maximale Winkelverzerrung von $9,2''$. Im ganzen kann man bei $y = 64^{\text{km}}$ eine Winkelverzerrung von $5''$ — $10''$ annehmen, was bei feinen Stadtvermessungszügen bereits erheblich an die Messungsfehler heranreicht oder sie überschreitet.

Oder betrachte man die linearen Verschiebungen von rund $1:20000$ oder 5^{mm} auf 100^{m} , so sind diese auch schon zu hoch bei feinen Stadtvermessungen.

Statt die Entfernungen s und die Richtungswinkel α einzeln nach den Formeln (3) S. 292 und S. 294 unten, zu reduzieren, könnte man zwar auch nur die $s \cos \alpha$ nach (4) S. 292 reduzieren, allein das würde wieder andere Übelstände mit sich bringen.

Mag man nun solche Fehler als unerheblich oder als bereits schädlich betrachten, jedenfalls muss man vor Augen führen, dass alle diese kleinen Widerwärtigkeiten mit einem Schlage verschwinden, wenn man statt der Soldnerschen Projektion die konforme Gauss'sche Projektion anwendet.

Vgl. hierzu auch mehrere Artikel in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 193—215, S. 249—252, S. 257—263, S. 321—339.

§ 90. Preussische Polyeder-Projektion.

Ausser den verschiedenen in diesem Kapitel behandelten mathematischen Projektionen zur ebenen Darstellung rechtwinkliger oder geographischer Coordinaten wollen wir zum Schlusse noch eine Projektionsart betrachten, welche sich hauptsächlich für geographische Coordinaten und Messtischzeichnung eignet, nämlich die Preussische sogenannte Polyeder-Projektion, welche wir in ihren Grundzügen schon in § 57. Fig. 2. S. 319 kennen lernten.

Es war dort davon die Rede, dass man die bekannten Messtisch-Trapeze der topographischen Abteilung der Landesaufnahme auf zweierlei Arten auftragen kann, erstens unmittelbar nach ihren Vierecksseiten (AB , CD , AC u. s. w. S. 318) und zweitens durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte in irgend welchem anderen System.

Von letzterem sei aber nun nicht die Rede, sondern nur von dem Auftragen der *einzelnen* Trapeze, welche als geradlinig behandelt, mit ihren Rändern links und rechts zusammengelegt eine zusammenhängende Projektion eines Parallelkreistreifens geben, aber mit ihren Nord- und Südrändern nicht scharf zusammenpassen können.