



## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 88. Richtungs-Reduktion

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

Dieses mit (22) verglichen wird geben:

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (23)$$

Wenn man also die drei verschiedenen  $\frac{1}{m}$  nach der Funktion (12) ausrechnet, und zwar nicht bloss für die drei verschiedenen  $y$ , sondern auch mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von  $r$ , entsprechend den geographischen Breiten  $\varphi_1, \varphi_0, \varphi_2$  oder den Abscissen  $x_0, x_1, x_2$ , so bekommt man nach (23) die richtige Entfernungs-Reduktion, ohne dass man dabei die Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gebraucht hätte; es hat genügt einzusehen, dass sich  $\frac{1}{m}$  durch eine Funktion 3ten Grades von der Form (17) ausdrücken lässt.

Trotzdem wollen wir doch auch noch den Ausdruck (22) mit Einsetzung der Coefficientenwerte  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  nach (18)–(21) bilden, und zwar mit Umsetzung  $s \sin t_1 = y_2 - y_1$  und  $s \cos t_1 = x_2 - x_1$ , wodurch man erhält:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{6 r_1^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) + \frac{\eta^2 t}{6 r^3} (x_2 - x_1) (y_1^2 + 2 y_1 y_2 + 3 y_2^2) \quad (24)$$

Hier kann man noch  $r_1$  auf den Mittelwert  $r_0$  reduzieren, nach (13):

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r_0^2} \left( 1 + \frac{4(x - x_1)}{r} \eta^2 t \right)$$

Dieses mit (24) verbunden giebt:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{6 r_0^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) - \frac{\eta^2 t}{6 r^2} (x_2 - x_1) (y_2^2 - y_1^2) \quad (25)$$

Hier gilt  $r_0$  als mittlerer Krümmungs-Halbmesser für die mittlere Breite  $\varphi_0$  oder für die mittlere Abscisse  $x_0$  der betrachteten Linie  $A B$ .

Die Gleichung (25) in logarithmischer Form geschrieben wird:

$$\log S - \log s = - \frac{\mu}{6 r_0^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) - \frac{\mu \eta^2 t}{6 r^3} (x_2 - x_1) (y_2^2 - y_1^2) \quad (26)$$

Dieses stimmt mit Schreiber S. 49, wenn man wie immer die gegenseitigen Zeichenumformungen macht. In erster Näherung stimmt dieses auch mit dem früheren (12)–(14) § 50, S. 282.

## § 88. Richtungs-Reduktion.

Um das Krümmungs-Differential zu bestimmen, betrachten wir in Fig. 1. und Fig. 2. S. 472 zwei benachbarte Punkte, welche auf dem Ellipsoid durch einen kleinen Bogen  $dS$  und in der Ebene durch  $ds$  verbunden sind, und untersuchen die verschiedenen dabei in Betracht kommenden Richtungen und Winkel, unter Zuziehung dessen, was schon in § 86. bei Fig. 4. S. 465 über die beiden Meridian-Konvergenzen  $\gamma'$  auf dem Ellipsoid und  $\gamma$  in der Ebene gesagt worden ist.

Dann wird man aus Fig. 1. alsbald die folgenden Gleichungen herauslesen können:

$$T_1 = \alpha_1 - \gamma_1 \quad T_2 = \alpha_2 - \gamma_2$$

$$T_1 - T_2 = (\gamma_2 - \gamma_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$T_1 - T_2 = (\gamma_2' - \gamma_1') + ((\gamma_2 - \gamma_2') - (\gamma_1 - \gamma_1')) - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

oder als Differential:

$$dT = d\gamma' + d(\gamma - \gamma') - d\alpha \quad (1)$$

Auf dem Ellipsoid ist nach (38) § 86. S. 464:

$$\gamma' = \lambda \sin \varphi + \lambda^3 \dots$$

$$\text{also } d\gamma' = d\lambda \sin \varphi + \lambda \cos \varphi d\varphi$$

(2)

Fig. 1. Ellipsoid.

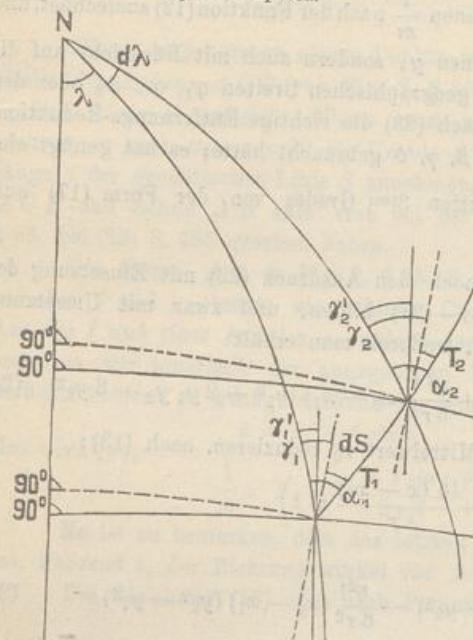
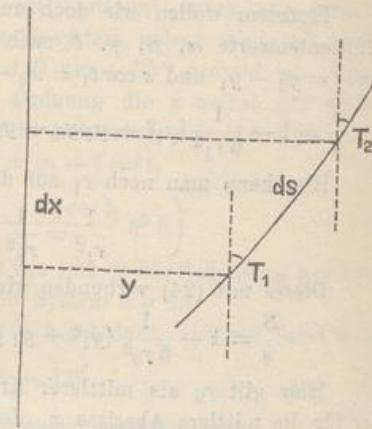


Fig. 2. Ebene.



Dagegen das Differential der Meridian-Konvergenz zwischen den beiden Punkten selbst wie immer nach § 69. Gleichung (5) S. 378:

$$d\alpha = d\lambda \sin \varphi \quad (3)$$

Also nun aus (1), (2), (3) zusammen:

$$dT = \lambda \cos \varphi d\varphi + d(\gamma - \gamma') \quad (4)$$

Von früher (39) § 86. S. 466 hat man:

$$\gamma - \gamma' = \frac{2}{3} \lambda^3 \eta^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

Auch dieses differentiiert gibt:

$$d(\gamma - \gamma') = 2 \eta^2 \lambda^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi d\lambda$$

Also im ganzen mit (4) zusammen:

$$dT = \lambda \cos \varphi d\varphi + 2 \eta^2 \lambda^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi d\lambda \quad (5)$$

Hiebei ist nach den Grundformeln von (3) und (4) § 69. S. 378:

$$d\varphi = \frac{dx}{M}$$

$$\text{und } \lambda \cos \varphi = \frac{y}{N} \text{ also } d\lambda \cos \varphi = \frac{dy}{N}$$

$$\text{Also wird (5): } dT = \frac{y dx}{MN} + 2 \eta^2 t \frac{y^2}{N^3} dy$$

Hier ist genau  $MN = r^2$  und im zweiten Gliede kann man genähert  $N^3 = r^3$  setzen also:

$$dT = \frac{y}{r^2} dx + 2\eta^2 t \frac{y^2}{r^3} dy \quad (6)$$

Damit wird wieder ebenso verfahren wie bei (23) § 50. S. 283 oder wie bei (9) § 85. S. 453, nämlich mit den Bezeichnungen  $l$  und  $z$  nach Fig. 2. § 85. S. 453.

$$-\frac{d^2 z}{dl^2} = \frac{dT}{dl} = \frac{y}{r^2} \frac{dx}{dl} + 2\eta^2 t \frac{y^2}{r^3} \frac{dy}{dl} \quad (7)$$

Es soll wieder  $r^2$  als veränderlich angenommen werden nach dem früheren (13) § 87. S. 469:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} \left( 1 - \frac{4(x - x_1)}{r} \eta^2 t \right) \quad (8)$$

also wird (7):

$$-\frac{d^2 z}{dl^2} = \frac{y}{r_1^2} \left( 1 - \frac{4(x - x_1)}{r} \eta^2 t \right) \frac{dx}{dl} + 2\eta^2 t \frac{y^2}{r^3} \frac{dy}{dl} \quad (9)$$

Die Coordinatenumwandlung wieder ebenso wie (15) § 87. S. 470 giebt:

$$\left. \begin{array}{l} x = x_1 + l \cos t_1 \quad \text{und} \quad y = y_1 + l \sin t_1 \\ \frac{dx}{dl} = \cos t_1 \quad \frac{dy}{dl} = \sin t_1 \end{array} \right\} \quad (10)$$

Diese (10) in (9) eingesetzt, werden wieder eine algebraische Funktion geben von dieser Form:

$$-\frac{d^2 z}{dl^2} = A + Bl + Cl^2 \quad (11)$$

wobei die Coefficienten folgende Bedeutungen haben:

$$A = \frac{1}{r_1^2} y_1 \cos t_1 + \frac{2}{r^3} \eta^2 t y_1^2 \sin t_1 \quad (12)$$

$$B = \frac{1}{r_1^2} \sin t_1 \cos t_1 + \frac{4\eta^2 t y_1}{r^3} (\sin^2 t_1 - \cos^2 t_1) \quad (13)$$

$$C = + \frac{2\eta^2 t}{r^3} \sin t_1 (\sin^2 t_1 - 2 \cos^2 t_1) \quad (14)$$

Die übrige Rechnung nimmt wieder den früheren Gang bei (29) § 50. S. 284 und (19) § 85. S. 454, nämlich:

$$\delta_1 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{6} + \frac{Cs^3}{12} \quad (15)$$

$$\delta_2 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{3} + \frac{Cs^3}{4} \quad (16)$$

Die Einsetzung von  $A$ ,  $B$ ,  $C$  aus (12)–(14) in (15) und (16) wird geben:

$$\delta_1 = \frac{x_2 - x_1}{6r_1^2} (2y_1 + y_2) - \frac{\eta^2 t}{3r^3} (x_2 - x_1)^2 (y_1 + y_2) + \frac{\eta^2 t}{6r^3} (y_2 - y_1) (3y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2) \quad (17)$$

$$\delta_2 = \frac{x_2 - x_1}{6r_1^2} (y_1 + 2y_2) - \frac{\eta^2 t}{3r^3} (x_2 - x_1)^2 (y_1 + 3y_2) + \frac{\eta^2 t}{6r^3} (y_2 - y_1) (y_1^2 + 2y_1 y_2 + 3y_2^2) \quad (18)$$

Die Überführung von  $r_1^2$  in einen Mittelwert wird diesesmal so gemacht:

$$x_{12} = \frac{2x_1 + x_2}{3} \quad \text{und} \quad x_{21} = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$$

$$\text{also} \quad x_{12} - x_1 = \frac{1}{3} (x_2 - x_1) \quad \text{und} \quad x_{21} - x_2 = \frac{1}{3} (x_1 - x_2)$$

Deshalb nach (13) § 87. S. 469:

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r_{12}^2} \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{(x_2 - x_1)}{r} \eta^2 t \right) \quad (19)$$

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r_{21}^2} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{x_2 - x_1}{r} \eta_2 t \right)$$

Damit gehen (17) und (18) über in:

$$\delta_1 = \frac{x_2 - x_1}{6r_{12}^2} (2y_1 + y_2) - \frac{\eta^2 t}{9r^3} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) + \frac{\eta^2 t}{6r^3} (y_2 - y_1) (3y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2) \quad (20)$$

$$\delta_2 = \frac{x_2 - x_1}{6r_{21}^2} (y_1 + 2y_2) + \frac{\eta^2 t}{9r^3} (x_2 - x_1)^2 (y_1 - y_2) + \frac{\eta^2 t}{6r^3} (y_2 - y_1) (y_1^2 + 2y_1 y_2 + 3y_2^2) \quad (21)$$

Diese Formeln stimmen mit Schreiber, S. 46, wenn man die Bezeichnungsumänderungen berücksichtigt; und in erster Näherung haben wir auch Übereinstimmung mit den früheren (31)–(32) § 50. S. 284.

#### *Schlussbetrachtung.*

Alle Formeln, welche in den vorstehenden §§ 86.–88. gefunden worden sind, gehen in die entsprechenden früheren Formeln von § 58. und § 50. über, wenn man die höheren Glieder weglässt, wie wir an den betreffenden Stellen bereits angegeben haben. Insbesondere sind die Formeln von § 87. und 88. bei Weglassung aller  $\eta^2$  lediglich die sphärischen Formeln von § 50.; und wenn man sich damit begnügen will, so kann man auch die viel einfacheren sphärischen Entwicklungen von § 50. an Stelle der umständlichen §§ 87. und 88. treten lassen.

Für kleine Geltungsbereiche, etwa von der Grösse der vierzig preussischen Katastersysteme, würden in der That die früheren Formeln von § 50. und § 58. mit demselben Rechte angewendet werden können, wie die ebenfalls nicht weiter getriebenen sogenannten Soldnerischen Formeln.

Ein Land mit praktischer Anwendung der Gauss schen konformen Theorie giebt es zur Zeit in Deutschland nicht (nachdem das Hannoverische System aufgegeben worden ist vgl. S. 329) und deswegen wollen wir auch Zahlenanwendungen zu den §§ 86.–88. hier unterlassen.

### § 89. Vorteile der konformen Coordinaten.

Nachdem wir schon in § 52. eine Vergleichung der kongruenten (Soldnerischen) und der konformen Coordinaten angestellt haben, welche am Schlusse daselbst S. 297 in allem Wesentlichen zu Gunsten der konformen Coordinaten ausgefallen ist, ist es angezeigt, nochmals hierauf zurückzukommen.

Dabei sei auch ein Wort über die Bezeichnung „kongruente Coordinaten“ eingeschaltet. Wir wollen unter kongruenter geodätischer ebener Abbildung einer auf einer krummen Fläche gezogenen Linie diejenige ebene Abbildungslinie verstehen, welche ein Landmesser auf der krummen Fläche mit Theodolit und Messlatten messend, nach gewöhnlichen Feldmess- und Rechenregeln auf einer Zeichenebene herstellen würde (abgesehen von dem Verjüngungsmassstabe der Zeichnung). Wir bedienen uns dabei wie bei der mathematischen Definition der geodätischen Linie (§ 68. S. 373) der Feldmessoperationen als Veranschaulichung einer mathematischen Begriffsbestimmung, und wir finden hierauf leicht den Satz, dass die geodätisch kongruente ebene Abbildung einer geodätischen Linie immer eine Gerade der Ebene ist, deren lineare Grösse der rektifizierten geodätischen Linie gleich ist. Die „geodätische Krümmung“ ist in diesem Falle gleich Null (vgl. hiezu § 107).

Die Ordinaten  $y$  und  $y'$ , der ebenen Soldnerischen Projektion Fig. 1. § 46. S. 275 sind in diesem Sinne geodätisch kongruente Abbildungen der sphärischen Ordinaten  $y$  und  $y'$  von Fig. 1 § 46. S. 257.