



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 90. Preussische Polyeder-Projektion

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](#)

Wenn mit $y = 64^{\text{km}}$ im Soldner schen System *eben* trianguliert wird, so werden süd-nördliche Verschiebungen von 5^{cm} auf 1^{km} vernachlässigt, oder z. B. 15^{cm} auf 3^{km} .

Es ist das ähnlich wie wenn ein Trigonometer bei Turm-Centrierungen oder dergl. bei rund 4^{km} Zielweite in nordwestlicher Richtung eine süd-nördliche Excentrität von 15^{cm} vernachlässigen wollte, während er gleichzeitig sich abmühte, seine Winkel am Theodolit auf wenige Sekunden genau zu messen; — denselben Fehler begehen die Katastervermessungen, welche bei Soldner schen Coordinaten bis $y = 64^{\text{km}}$ eben triangulieren.

Eine letzte Betrachtung mag sich noch auf Polygonmessungen beziehen, welche bei Soldner schen Coordinaten mit $y = 64^{\text{km}}$ auch schon mehr Verzerrungen erleiden als bei genauen Messungen, z. B. bei einigermassen feinen Stadtvermessungszügen zulässig ist. Die Polygonwinkel erleiden im Soldner schen Systeme nach der Tabelle S. 478 Verzerrungen ganz unabhängig von der Streckenlänge bzw. Zielweite, welche bei Zügen zu rund $50^{\text{m}} - 150^{\text{m}}$ angenommen werden mag. Nimmt man $y_2 - y_1 = x_2 - x_1 = 100^{\text{m}}$ oder $= 50^{\text{m}}$, so entsteht bei $y = 60^{\text{km}}$ eine maximale Richtungsreduktion von $4,6''$ also eine maximale Winkelverzerrung von $9,2''$. Im ganzen kann man bei $y = 64^{\text{km}}$ eine Winkelverzerrung von $5'' - 10''$ annehmen, was bei feinen Stadtvermessungszügen bereits erheblich an die Messungsfehler heranreicht oder sie überschreitet.

Oder betrachte man die linearen Verschiebungen von rund $1 : 20000$ oder 5^{mm} auf 100^{m} , so sind diese auch schon zu hoch bei feinen Stadtvermessungen.

Statt die Entfernungen s und die Richtungswinkel α einzeln nach den Formeln (3) S. 292 und S. 294 unten, zu reduzieren, könnte man zwar auch nur die $s \cos \alpha$ nach (4) S. 292 reduzieren, allein das würde wieder andere Übelstände mit sich bringen.

Mag man nun solche Fehler als unerheblich oder als bereits schädlich betrachten, jedenfalls muss man vor Augen führen, dass alle diese kleinen Widerwärtigkeiten mit einem Schlage verschwinden, wenn man statt der Soldner schen Projektion die konforme Gauss sche Projektion anwendet.

Vgl. hiezu auch mehrere Artikel in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 193—215, S. 249—252, S. 257—263, S. 321—339.

§ 90. Preussische Polyeder-Projektion.

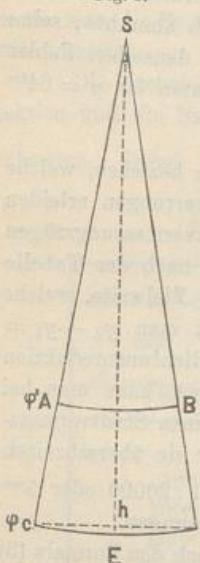
Ausser den verschiedenen in diesem Kapitel behandelten mathematischen Projektionen zur ebenen Darstellung rechtwinkliger oder geographischer Coordinaten wollen wir zum Schlusse noch eine Projektionsart betrachten, welche sich hauptsächlich für geographische Coordinaten und Messtischzeichnung eignet, nämlich die Preussische sogenannte Polyeder-Projektion, welche wir in ihren Grundzügen schon in § 57. Fig. 2. S. 319 kennen lernten.

Es war dort davon die Rede, dass man die bekannten Messtisch-Trapeze der topographischen Abteilung der Landesaufnahme auf zweierlei Arten auftragen kann, erstens unmittelbar nach ihren Vierecksseiten (AB, CD, AC u. s. w. S. 318) und zweitens durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte in irgend welchem anderen System.

Von letzterem sei aber nun nicht die Rede, sondern nur von dem Auftragen der *einzelnen* Trapeze, welche als geradlinig behandelt, mit ihren Rändern links und rechts zusammengelegt eine zusammenhängende Projektion eines Parallelkreisstreifens geben, aber mit ihren Nord- und Südrändern nicht scharf zusammenpassen können.

Das so entstehende Klaffen ist in der Praxis gleichgültig, insofern man niemals mehr als einige benachbarte Blätter zusammenzulegen hat, wobei der Papiereingang viel wichtiger ist als jenes unmerkliche Klaffen; und wir betrachten daher die Herstellung nach S. 318 mit der Hilfstafel von S. [41] des Anhangs als erledigt, und haben nur noch eine Kleinigkeit nachzutragen, welche früher in § 57. S. 318 unten und S. 319 kurz berührt worden ist, nämlich die schwache Krümmung der Süd- und Nord-Ränder.

Fig. 1.



Wir nehmen hiezu nebenstehende Fig. 1. in Beziehung zu der früheren Fig. 1. § 81. S. 428, und betrachten die Kegelabwicklung SAB zur Breite φ' und SCD zur Breite φ . Dann ist der Abwicklungs-Halbmesser $SC = SD = SE = N \cot \varphi$ und der Bogen $CD = N \cos \varphi \lambda$, wenn N wie gewöhnlich der Querkrümmungs-Halbmesser zur Breite φ ist. Dann giebt Fig. 1 die kleine Pfeilhöhe h in bekannter Näherung:

$$h = \frac{CE^2}{2SE} = \frac{(\frac{1}{2}N \cos \varphi \lambda)^2}{2N \cot \varphi} = \frac{\lambda^2}{8} N \sin \varphi \cos \varphi$$

oder für λ in Minuten:

$$h = \frac{\lambda^2}{8 \varphi'^2} N \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\lambda^2}{16 \varphi'^2} N \sin 2\varphi \quad (1)$$

Nehmen wir rund $\varphi = 50^\circ$, also nach S. [20] $\log N = 6.80550$, dazu $\lambda = 10'$, so giebt vorstehende Formel (1):

$$h = 3,328^m$$

Dieses ist natürliches Mass und giebt in der Kartendarstellung in Verjüngung 1 : 25000 den kleinen Wert $\frac{3,328^m}{25000} = 0,00013^m = 0,13^{mm}$.

Dieser Betrag von rund $0,1^{mm}$ ist so klein, dass man ihn kartographisch wohl vernachlässigen kann, indessen würde seine Berücksichtigung auch leicht sein.

Klaffen der Blätter. Ohne auf alles einzugehen, was hier in kartographischer Beziehung noch angefügt werden könnte, wollen wir nur noch bemerken, dass die im Vorstehenden beschriebenen preussischen Blätter in Parallelkreisschichten sich zwanglos aneinander fügen lassen, dass aber eine Schichte mit einer Mittelbreite φ an die benachbarte Schichte mit der Mittelbreite $\varphi + \delta'$ oder $\varphi - \delta'$ nicht völlig anschliessen kann. Ohne die Formel für das Klaffen zwischen je zwei solchen Schichten hier zu entwickeln, wollen wir nur wenigstens die Formel selbst angeben. Wenn b der richtige Meridianbogen zwischen φ und $\varphi + \delta \varphi$ ist und λ die Länge eines Meridians von der Mitte an gezählt, so wird in diesem Meridian statt des wahren Bogens b ein Bogen b' auftreten nach dem Verhältnis

$$\frac{b'}{b} = 1 + V^2 \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \quad \text{mit} \quad V^2 = 1 + \epsilon^{12} \cos^2 \varphi$$

Man kann hieraus berechnen mit $\delta \varphi = 6'$, $b = M d \varphi$, und $\lambda = 10^\circ$, dass $b' - b = 70^m$ oder verjüngt $b' - b = 70^m : 25000 = 3^{mm}$ wird, woraus sich die praktische Unschädlichkeit des fraglichen Klaffens im Vergleich mit dem Papiereingang u. s. w. herausstellt.

Wir wollen aber hieran noch eine weitere Bemerkung knüpfen, dass das Verhältnis $\frac{b'}{b} = 1 + V^2 \frac{\lambda}{2} \cos^2 \varphi$ (das übrigens hier auch nur genähert angegeben ist), dazu führen kann, aus der vorstehenden Betrachtung eine Art von konformer polykonischer Projektion abzuleiten, welche in erster Näherung mit der Gauss'schen konformen Projektion von § 86. übereinstimmt. Dieses später näher auszuführen möge vorbehalten bleiben.

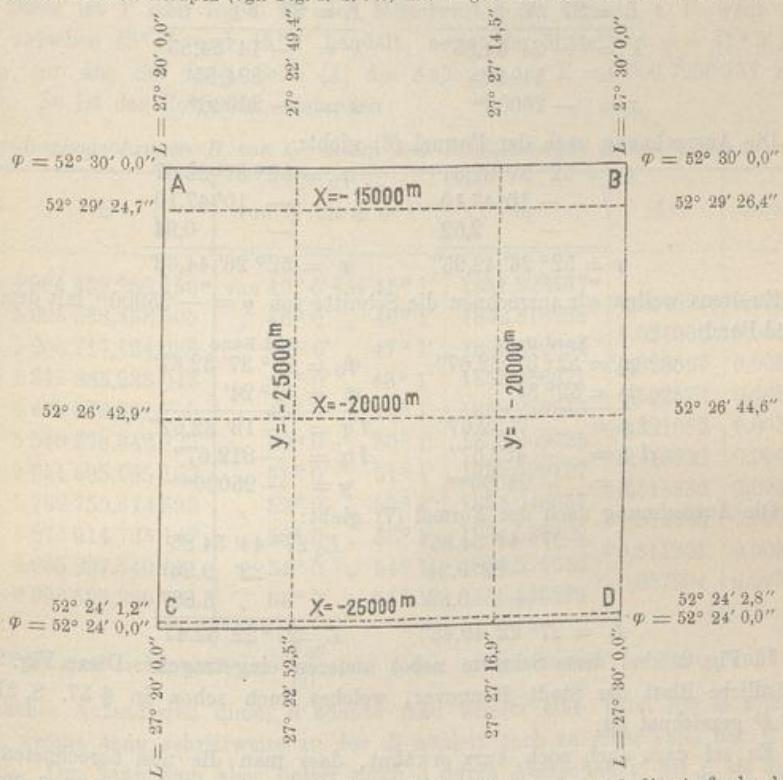
Wir wollen nun noch die Umkehrung derjenigen Aufgabe vornehmen, welche bereits in § 57. S. 319 durch Einrechnen der Trapezecken in ein Kataster-Coordinaten-system behandelt worden ist, d. h. wir wollen nun umgekehrt die Aufgabe stellen, in ein vorhandenes Messtischblatt der topographischen Karte 1 : 25000 die x - und y -Linien

eines Katastersystems einzurechnen, etwa um Kartennachträge aus dem Kataster in das topographische Blatt bequem und genau hinüberzutragen u. s. w. Insofern es sich nur um Zeichnung im Massstab 1:25000 handelt, wollen wir uns mit Genauigkeit von rund 0,1" in den Breiten φ und in den Längen L begnügen.

Man könnte daran denken, für runde Werte x und y die zugehörigen Breiten φ und L nach § 55. S. 308 auszurechnen, und darnach das Netz der x - und y -Parallelen in das topographische Blatt hineinzubringen; und man kann das wohl thun, wozu ausser dem Schema S. 308 keine weitere Anleitung nötig ist. Aber es bietet sich ein graphisch besseres Verfahren so dar, dass man nur die Randschnitte bestimmt, d. h. auf dem West- und Ost-Rand des Blattes die Schnitte für runde x , und auf dem Süd- und Nord-Rand die Schnitte für runde y , wie auf nachfolgender Fig. 2 zu sehen ist.

Fig. 2.

Preussisches Messtischtrapez (vgl. Fig. 2. S. 319) mit eingerechneten Randschnitten für x und y .



Bleiben wir zuerst bei dem West- und Ost-Rand, so wird die Aufgabe lauten: für gegebene Länge L und Abscisse x soll die Breite φ berechnet werden. Wenn φ_0 und L_0 die Grundwerte des benützten Kataster-Coordinatensystems sind, z. B. nach S. 308—309:

$$\text{Celle } \varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709'' \quad L_0 = 27^\circ 44' 54,8477'' \quad (2)$$

so hat man auch für jedes φ und L die

$$\text{Differenzen } \varphi - \varphi_0 = \Delta \varphi \quad L - L_0 = \lambda \quad (3)$$

Aus (8) § 55. S. 304 und (19) S. 305 folgt:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{x}{M} \varrho - \frac{V^2}{2\varrho} \lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi + \dots \quad (4)$$

Desgleichen aus (10) S. 304 mit $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$:

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi_0} + \frac{y \Delta \varphi \tan \varphi_0}{N \cos \varphi_0} + \dots \quad (5)$$

Die Ausrechnung mit dem Konstanten (2) giebt:

$$\varphi = 52^\circ 37' 32,67'' + [8.509 938] x - [4.06902] \lambda^2 \quad (6)$$

$$L = 27^\circ 44' 54,85'' + [8.725 662] y + [3.52823] y \Delta \varphi \quad (7)$$

Diese Näherungsformeln genügen für den angegebenen Zweck, auf 0,1" genau; auf genauere Berechnung, welche leicht zu machen wäre, wollen wir hier nicht eingehen.

Man wird natürlich nach einem Netzbilde zuerst überlegen, welche Schnitte überhaupt in Frage kommen, und so wollen wir nach Fig. 2. S. 481 z. B. berechnen den Schnitt von $x = -20000^m$ auf dem West- und Ost-Rand:

West-Rand	Ost-Rand
$L_0 = 27^\circ 44' 54,85''$	$L_0 = 27^\circ 44' 54,85''$
$L = 27^\circ 20'$	$L = 27^\circ 30'$
$\lambda = -24' 54,85''$	$\lambda = -14' 54,85''$
$= -1494,85$	$= 894,85''$
$x = -20000^m$	$x = -20000^m$

Die Ausrechnung nach der Formel (6) giebt:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0 & = & 52^\circ 37' 32,67'' \\ & - & 10' 47,10 \\ & - & 2,62 \\ \hline \varphi & = & 52^\circ 26' 42,95'' \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \varphi_0 & = & 52^\circ 37' 32,67 \\ & - & 10' 47,10 \\ & - & 0,94 \\ \hline \varphi & = & 52^\circ 26' 44,63'' \end{array}$$

Zweitens wollen wir ausrechnen die Schnitte von $y = -25000^m$ mit dem Nord- und Süd-Rand:

Nord-Rand	Süd-Rand
$\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,67''$	$\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,67''$
$\varphi = 52^\circ 30'$	$\varphi = 52^\circ 24'$
$\Delta\varphi = -7' 32,67''$	$\Delta\varphi = -13' 32,67''$
$\Delta\varphi = -452,67''$	$\Delta\varphi = -812,67''$
$y = -25000^m$	$y = -25000^m$

Die Ausrechnung nach der Formel (7) giebt:

$$\begin{array}{rcl} L_0 = 27^\circ 44' 54,85'' & & L_0 = 27^\circ 44' 54,85'' \\ & - 22' 9,24 & - 22' 9,24'' \\ & + 3,82 & + 6,86'' \\ \hline L & = 27^\circ 22' 49,43'' & L = 27^\circ 22' 52,47'' \end{array}$$

In Fig. 2. sind diese Schnitte nebst anderen eingetragen. Diese Fig. 2 giebt das nördliche Blatt der Stadt Hannover, welches auch schon in § 57. S. 319 mit *A B C D* gezeichnet ist.

Es sei dazu auch noch kurz erwähnt, dass man die nun berechneten Rand schnitte von Fig. 2. auch dadurch erhalten kann, dass man die früher in § 55. S. 318—320 berechneten Randmasse proportional einteilt, z. B. auf dem West-Rand *A C* hat man:

$$\begin{array}{lll} A & \varphi = 52^\circ 30' & x = -13909,6 \\ & & \delta x = 1090,4 \\ & & x = -15000 & 5000,0 \\ & & x = -20000 & 5000,0 \\ & & x = -25000 & 35,9 \\ \hline C & \varphi = 52^\circ 24' & x = -25035,9 \\ & & \Delta\varphi = 0^\circ 6' \Delta x = 11126,3 & 11126,3 \end{array}$$

Wenn man den δx entsprechende $\delta\varphi$ proportional einrechnet, so bekommt man dieselben Werte wie nach den Formeln (6) und (7).