Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 91. Abscissen als Meridianbogen

§ 91. Abscissen als Meridianbogen.

Obgleich die Meridianbogenlängen schon in § 35. gründlich behandelt worden sind, wollen wir nun doch zum Schlusse dieses Kapitels über geodätische Coordinaten nochmals darauf zurückkommen, und noch eine ausführliche Tafel der Meridianbogenlängen B vom Äquator $\varphi = 0$ bis zur Breite φ, von Minute zu Minute, in den Anhangstafeln Seite [55]—[57] beigeben.

Um die Berechnung dieser Tafel nachzuweisen, greifen wir zuerst zurück auf die Werte B von § 35. S. 216, welche im Folgenden wiederkehren, (mit weiteren Dezimalstellen) nebst den Minutenbögen m, welche nach dem ersten Gliede von (40) S. 218 für $\varDelta\varphi = 1'$ berechnet sind:

$$m = M\frac{\varDelta\varphi}{\varrho} = M\frac{1'}{\varrho'} = \frac{c}{\varrho'}\frac{1}{V^3} = [3.269\,8237{\cdot}607]\,\frac{1}{V^3} \qquad (1)$$

Dabei ist V oder $log\ V$ für den Mittelwert φ zu nehmen, z. B. wenn es sich um m zwischen $45°\,0'$ und $45°\,1'$ handelt, so ist der Mittelwert $\varphi = 45°\,0'\,30''$ zu nehmen, um aus der Tafel Seite [4] des Anhangs $log\ V = 0.000\,7280{\cdot}957$ zu entnehmen. So ist das Folgende entstanden:

Meridianbogenlängen B von $0°$ bis φ und Minutenbogen m von φ bis $\varphi + 1'$.

φ	B	von φ bis $\varphi + 1'$	m	$\varDelta m$	$\delta = \frac{\varDelta m}{60}$
45°	4 984 439,266 150^m	von 45° 0′ bis 45° 1′	1851,993567^m	0,324671^m	0,0054112^m
46	5 095 568,458 505	„ 46° 0′ „ 46° 1′	1852,318238	0,324366	0,0054061
47	5 206 717,124 088	„ 47° 0′ „ 47° 1′	1852,642604	0,323667	0,0053944
48	5 317 885,233 043	„ 48° 0′ „ 48° 1′	1852,966271	0,322572	0,0053762
49	5 429 073,731 700	„ 49° 0′ „ 49° 1′	1853,288843	0,321082	0,0053514
50	5 540 279,542 823	„ 50° 0′ „ 50° 1′	1853,609925	0,319202	0,0053200
51	5 651 505,565 163	„ 51° 0′ „ 51° 1′	1853,929127	0,316930	0,0052822
52	5 762 750,674 593	„ 52° 0′ „ 52° 1′	1854,246057	0,314265	0,0052378
53	5 874 014,723 147	„ 53° 0′ „ 53° 1′	1854,560322	0,311221	0,0051870
54	5 985 297,540 011	„ 54° 0′ „ 54° 1′	1854,871543	0,307794	0,0051299
55	6 096 598,930 561	„ 55° 0′ „ 55° 1′	1855,483323		

Wie man sieht, sind die $\frac{\varDelta m}{60} = \delta$ schon einigermassen beständig; und durch allmähliches Aufaddieren dieser δ könnte man bereits eine Tafel der m selbst herstellen, welche dann schrittweise zu den B addiert auch zu einer Tafel der B führen müssten. Das kann man aber besser machen durch Ausrechnung der δ als Differentiale nach (35) S. 217:

$$\frac{d^2 m}{d\varphi^2} = \frac{3\,M}{V^2}\,\eta^2\,t = \frac{3\,c}{V^5}\,e'^2\cos^2\varphi\,tang\,\varphi = \frac{3}{2}\,\frac{c\,e'^2}{V^3}\,sin 2\varphi$$

und für Intervall von $1'$:

$$\delta = \frac{3}{2}\,\frac{c\,e'^2}{\varrho'^2}\,\frac{sin 2\varphi}{V^5} = [7.7369599]\,\frac{sin 2\varphi}{V^5} \qquad (2)$$

Z. B. zwischen $\varphi = 45°$ und $\varphi = 46°$ haben wir ausgerechnet:

$\varphi =$	45° 5′	45° 15′	45° 25′	45° 35′	45° 45′	45° 55′
$\delta =$	0,0054116	0,0054117	0,0054115	0,0054113	0,0054108	0,0054102

Die Summe dieser δ ist 0,0324671 und das 10 fache = 0,324 671 füllt also gerade das Intervall Δm zwischen den zwei ersten m unserer Tabelle S. 483.

Allerdings ist in der Gegend von $\varphi = 45°$ die ganze Rechnungsart am günstigsten, weil hier der Faktor $sin\, 2\varphi$ in der Gleichung (2) nahezu konstant ist; aber auch in weiter abstehenden Breiten bleibt das Verfahren brauchbar, und es ist somit nachgewiesen, dass man nach Ausrechnen der nöthigen δ durch einfaches Aufaddieren (mit der Rechenmaschine) die Tabellen Seite [55]—[57] des Anhangs herstellen kann. Dieses ist geschehen in Verbindung mit der vergleichenden Zuziehung der schon auf S. 216 zugezogenen Tabellen von F. G. Gauss und Hartl. Wir haben auch dort schon gesehen, dass die verschiedenen Berechner in den letzten Stellen deswegen von einander abwichen, weil sie von verschiedenen Annahmen in Bezug auf die letzten Stellen der Bessel schen Erddimensionen ausgegangen sind. Unsere neue Tafel S. [55]—[57] des Anhangs giebt nun die Werte B und m entsprechend den Konstanten der preussischen Landesaufnahme von § 31. S. 191 unten; allerdings auch nicht mit voller Gewähr der letzten Millimeterstelle, weil dazu die bei (2) angedeutete Rechnungsart noch etwas schärfer gemacht werden müsste, was in Ermanglung eines Bedürfnisses scharfer Millimeterangaben vorerst unterblieben ist. Auch muss daran erinnert werden, dass die frühere Tabelle S. [38] aus den angegebenen Gründen die B ungefähr um 1^{mm} kleiner giebt als die nun ausführliche Tabelle S. [57].

Um eine Anwendung unserer Tabelle Seite [55]—[57] zu zeigen, wollen wir nochmals das Beispiel Celle von S. 220 vornehmen:

$$\text{Celle } \varphi_0 = 52°\, 37'\, 32{,}6709''$$

Dazu soll B gefunden werden. Man nimmt aus Seite [57]:

für $\varphi = 52°\, 37'$ $\qquad B_1 = 5\,831\,361{,}276^m$

$\delta\varphi = 32{,}6709''$ $\qquad$ mit $m = 1854{,}441^m$

Hiernach kann man ausrechnen:

$log\, \delta\varphi$	1.514 1611
$log\, 60$	1.778 1513
$log\, \delta\varphi : 60$	9.736 0098
$log\, m$	3.268 2130
$log\, \delta B$	3.004 2228

$$\delta B = 1009{,}771^m$$
$$B = 5832\,371{,}047^m \qquad (3)$$

Bequemer und ausserdem noch etwas schärfer rechnet man mit Zuziehung der Coëfficienten [1] aus der Anhangstafel S. [30]—[35]. In unserem Falle ist die Mittelbreite $\varphi = 52°\, 37'\, 16{,}33545''$ giltig, also nach S. [33] $log\,[1] = 8.509\,9387$, womit man weiterrechnet:

$log\,[1]$	8.509 9387	$B_1 = 5\,831\,361{,}276^m$
$log\, \delta\varphi$	1.514 1611	$\delta B = 1\,009{,}770^m$
$log\,(\delta\varphi : [1])$	3.004 2224	$B = 5\,832\,371{,}046^m$ (4)

Dieses stimmt mit B_0 von S. 220, weil die Tafeln S. [38] und S. [57] an dieser Stelle übereinstimmen, was, wie schon mehrfach bemerkt, sonst nicht auf 1^{mm} genau der Fall ist.

Mit den Anhangstafeln S. [38] und S. [55]—[57] kann nun stets der Meridianbogen B, welcher in den Formeln von § 58. S. 323 und dann in § 86. S. 461 vorkommt, als Funktion einer Breite φ bestimmbar betrachtet werden, ebenso wie auch umgekehrt φ als Funktion des zugehörigen B; und alle unsere Coordinatenformeln, in welchen ein solches B vorkommt, sind dadurch gesichert.

Wir wollen aber auch noch die Coordinatenformeln betrachten, in welchen eine Breitendifferenz $\varDelta\varphi$ als Funktion eines Abscissenwertes x vorkommt oder umgekehrt. Z. B. die Dessauer queraxigen Coordinaten § 83. S. 441 geben mit $y = 0$ und $\lambda = 0$ aus (24) und (27) S. 441:

$$\varDelta\varphi = x\frac{V^3}{c}\varrho - \frac{3}{2}\frac{x^2}{c^2}V^4\eta^2 t\,\varrho + \frac{x^3}{2\,c^3}V^5\eta^2\varrho(-1 + t^2 - \eta^2 + 5\,\eta^2 t^2) \qquad (5)$$

und
$$x = \frac{\varDelta\varphi}{\varrho}\frac{c}{V^3} + \frac{3}{2}\frac{\varDelta\varphi^2}{\varrho^2}\frac{c}{V^5}\eta^2 t - \frac{\varDelta\varphi^3}{2\,\varrho^3}\frac{c}{V^7}\eta^2(-1 + t^2 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2) \qquad (6)$$

Diese Formel für x stimmt mit der Formel für m in (37) § 35. S. 218, wie es sein muss, und ebenso auch mit (33) § 78. S. 413. Die andere Formel $\varDelta\varphi$ ist die Umkehrung von x, wie man sich unmittelbar überzeugen kann. Wenn es sich nun um Hilfstafeln zu den Formeln S. 441 oder ähnlichen handelt, so wird man zuerst die Hauptglieder von (5) und (6) tabulieren, wie wir für die Dessauer Formeln S. 441 gethan haben, (nicht nur für x und $\varDelta\varphi$, sondern auch für y und λ zu S. 441), und ebenso kann man auch die folgenden Gliedern von (5) und (6) tabellarisch ausrechnen, dabei auch die gleiche Zeichen habenden Glieder mit x und x^3, sowie $\varDelta\varphi$ und $\varDelta\varphi^3$ zusammenfassen u. s. w.; und solche Tafeln scheinen uns besser und bequemer als die Tafel der Werte B selbst von S. [55]—[57], weil man durch Untertabellen mit $\varDelta\varphi =$ 1' dann 10'' 1'' 0,1''... die Sache so bequem einrichten kann, dass nur noch glattes Zusammensetzen nötig ist, alles dieses unter der Voraussetzung, dass die x und $\varDelta\varphi$ verhältnismässig klein sind, (bei queraxigen Coordinaten).

Dann kommt aber noch die Frage, ob die Coordinaten kongruent oder konform sind, also in § 83, ob die Formeln (24), (27) S. 441 oder (36), (39) S. 444 benützt werden sollen, oder ob die Hilfstafeln so eingerichtet werden sollen, dass sie auf beide Fälle passen.

Alles dieses sind kleine Formfragen, welche aus Veranlassung der Formeln von § 83. aufgestellt wurden, welche auch durch tabellarische Hilfen bereits teilweise beantwortet wurden, ohne dass hier weiter darauf einzugehen wäre.

Kapitel VIII.

Konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel.

§ 92. Allgemeines.

Ausser der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene, welche wir in den früheren §§ 86.—88. behandelt haben, verdanken wir Gauss auch noch eine weitergehende Theorie dieser Art, bei welcher das Umdrehungsellipsoid auf eine Kugel konform abgebildet wird, so dass nur noch die Formeln der sphärischen Trigonometrie erforderlich sind, um geodätische Aufgaben des Ellipsoids zu lösen.

Ausser den schon in § 86. S. 459 zusammengestellten allgemeinen Litteraturangaben ist hier besonders als Quelle zu nennen: „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von Carl Friedrich Gauss", erste Abhandlung, der Königl. Sozietät überreicht 1843, Okt. 23. In der Gesamt-Ausgabe „Carl Friedrich Gauss ‚Werke'" ist diese Abhandlung aufgenommen in Band IV, Göttingen 1873, S. 259—300.

Die Theorie der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel hat in jüngster Zeit erhöhte Bedeutung erlangt, indem die trigonometrische Abteilung der