Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 92. Allgemeines

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Wir wollen aber auch noch die Coordinatenformeln betrachten, in welchen eine Breitendifferenz $\varDelta\varphi$ als Funktion eines Abscissenwertes x vorkommt oder umgekehrt. Z. B. die Dessauer queraxigen Coordinaten § 83. S. 441 geben mit $y = 0$ und $\lambda = 0$ aus (24) und (27) S. 441:

$$\varDelta\varphi = x\frac{V^3}{c}\varrho - \frac{3}{2}\frac{x^2}{c^2}V^4\eta^2 t\,\varrho + \frac{x^3}{2\,c^3}V^5\eta^2\varrho\,(-1 + t^2 - \eta^2 + 5\,\eta^2 t^2) \qquad (5)$$

und
$$x = \frac{\varDelta\varphi}{\varrho}\frac{c}{V^3} + \frac{3}{2}\frac{\varDelta\varphi^2}{\varrho^2}\frac{c}{V^5}\eta^2 t - \frac{\varDelta\varphi^3}{2\,\varrho^3}\frac{c}{V^7}\eta^2(-1 + t^2 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2) \qquad (6)$$

Diese Formel für x stimmt mit der Formel für m in (37) § 35. S. 218, wie es sein muss, und ebenso auch mit (33) § 78. S. 413. Die andere Formel $\varDelta\varphi$ ist die Umkehrung von x, wie man sich unmittelbar überzeugen kann. Wenn es sich nun um Hilfstafeln zu den Formeln S. 441 oder ähnlichen handelt, so wird man zuerst die Hauptglieder von (5) und (6) tabulieren, wie wir für die Dessauer Formeln S. 441 gethan haben, (nicht nur für x und $\varDelta\varphi$, sondern auch für y und λ zu S. 441), und ebenso kann man auch die folgenden Gliedern von (5) und (6) tabellarisch ausrechnen, dabei auch die gleiche Zeichen habenden Glieder mit x und x^3, sowie $\varDelta\varphi$ und $\varDelta\varphi^3$ zusammenfassen u. s. w.; und solche Tafeln scheinen uns besser und bequemer als die Tafel der Werte B selbst von S. [55]—[57], weil man durch Untertabellen mit $\varDelta\varphi =$ 1' dann 10'' 1'' 0,1''... die Sache so bequem einrichten kann, dass nur noch glattes Zusammensetzen nötig ist, alles dieses unter der Voraussetzung, dass die x und $\varDelta\varphi$ verhältnismässig klein sind, (bei queraxigen Coordinaten).

Dann kommt aber noch die Frage, ob die Coordinaten kongruent oder konform sind, also in § 83, ob die Formeln (24), (27) S. 441 oder (36), (39) S. 444 benützt werden sollen, oder ob die Hilfstafeln so eingerichtet werden sollen, dass sie auf beide Fälle passen.

Alles dieses sind kleine Formfragen, welche aus Veranlassung der Formeln von § 83. aufgestellt wurden, welche auch durch tabellarische Hilfen bereits teilweise beantwortet wurden, ohne dass hier weiter darauf einzugehen wäre.

Kapitel VIII.

Konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel.

§ 92. Allgemeines.

Ausser der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene, welche wir in den früheren §§ 86.—88. behandelt haben, verdanken wir Gauss auch noch eine weitergehende Theorie dieser Art, bei welcher das Umdrehungsellipsoid auf eine Kugel konform abgebildet wird, so dass nur noch die Formeln der sphärischen Trigonometrie erforderlich sind, um geodätische Aufgaben des Ellipsoids zu lösen.

Ausser den schon in § 86. S. 459 zusammengestellten allgemeinen Litteraturangaben ist hier besonders als Quelle zu nennen: „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von Carl Friedrich Gauss", erste Abhandlung, der Königl. Sozietät überreicht 1843, Okt. 23. In der Gesamt-Ausgabe „Carl Friedrich Gauss ‚Werke'" ist diese Abhandlung aufgenommen in Band IV, Göttingen 1873, S. 259—300.

Die Theorie der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel hat in jüngster Zeit erhöhte Bedeutung erlangt, indem die trigonometrische Abteilung der preussischen Landesaufnahme diese Theorie zur Anlage eines konformen rechtwinkligen Coordinatensystems über ganz Preussen verwertet hat, von welchem schon in dem früheren § 59. S. 331 kurz die Rede war, mit einigen Citaten, zu welchen auch noch eine Mitteilung von General Schreiber in den „Verhandlungen der 1887er Konferenz der perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888“, Annex X^b, S. 10—11 gehört.

Die fragliche Anwendung, bestehend in einer Doppelprojektion, werden wir in dem nachfolgenden § 101. ausführlich behandeln. Zunächst haben wir die reine Kugelprojektion vorzunehmen.

Wir behandeln in dem nachfolgenden Kapitel die Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel nach den citierten klassischen Gauss schen Original-Schriften.

Wir haben in unserer Bearbeitung die Bezeichnung von Gauss beibehalten, jedenfalls die Konstanten P, Q, α, m, u. s. w., während im übrigen unser auch sonst gebrauchtes $V^2 = 1 + \eta^2$ sich nützlich erwiesen hat.

Weggelassen haben wir alle Entwicklungen über die dritte Ordnung, unter Verweisung auf das Original-Werk.

Ändern mussten wir in § 98. den Art. 13, welcher über Azimut-Reduktion handelt, weil hiebei Gauss die geodätische Linie als kürzeste Linie nach der Theorie der Variations-Rechnung einführt, die in unseren Gang (Geodätische Linie S. 367—376) nicht passt, weshalb wir eine andere Entwicklung § 98. an Stelle von Art. 13 gesetzt haben.

Dazu wurde in § 99. eine andere allgemeine Formel von Schols eingefügt.

§ 93. Grundformeln.

In Fig. 1. bezeichnet ds das Differential einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid und in Fig. 2. ist ds' das Differential eines entsprechenden Grosskreisbogens auf einer Kugel vom Halbmesser A. Im übrigen gelten folgende Bezeichnungen und daraus folgende Beziehungen:

Fig. 1.
Ellipsoid.

Fig. 2.
Kugel.

	Ellipsoid	Kugel	
Punkt	P	Q	
Breite	φ	u	(1)
Längen-Unterschied	dl	$d\lambda = \alpha\, dl$	(2)

Hiebei ist α eine vorläufig eingeführte Konstante, deren Wert sich nachher ergeben wird. Weiter haben wir einander entsprechend:

Parallelbogen	$P_1 P' = N \cos\varphi\, dl$	$Q_1 Q' = A \cos u\, \alpha\, dl$	(3)
Meridianbogen	$PP_1 = M\, d\varphi$	$QQ_1 = A\, du$	(4)

Dabei sind M und N wie gewöhnlich die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids.

Wenn nun QQ_1Q' konforme Abbildung von PP_1P' sein soll, so müssen die Seiten der beiden Dreiecke ein konstantes Verhältnis haben, welches mit m bezeichnet sei, also:

$$\frac{A\, du}{M\, d\varphi} = \frac{\alpha A \cos u}{N \cos\varphi} = m \tag{5}$$

Hieraus erhält man als Beziehung zwischen der sphärischen Breite u und der sphäroidischen Breite φ die Differentialgleichung:

$$\frac{du}{d\varphi} = \alpha \frac{M}{N} \frac{\cos u}{\cos\varphi}$$