Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 93. Grundformeln

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

preussischen Landesaufnahme diese Theorie zur Anlage eines konformen rechtwinkligen Coordinatensystems über ganz Preussen verwertet hat, von welchem schon in dem früheren § 59. S. 331 kurz die Rede war, mit einigen Citaten, zu welchen auch noch eine Mitteilung von General Schreiber in den „Verhandlungen der 1887er Konferenz der perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888“, Annex X^b, S. 10—11 gehört.

Die fragliche Anwendung, bestehend in einer Doppelprojektion, werden wir in dem nachfolgenden § 101. ausführlich behandeln. Zunächst haben wir die reine Kugelprojektion vorzunehmen.

Wir behandeln in dem nachfolgenden Kapitel die Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel nach den citierten klassischen Gauss schen Original-Schriften.

Wir haben in unserer Bearbeitung die Bezeichnung von Gauss beibehalten, jedenfalls die Konstanten P, Q, α, m, u. s. w., während im übrigen unser auch sonst gebrauchtes $V^2 = 1 + \eta^2$ sich nützlich erwiesen hat.

Weggelassen haben wir alle Entwicklungen über die dritte Ordnung, unter Verweisung auf das Original-Werk.

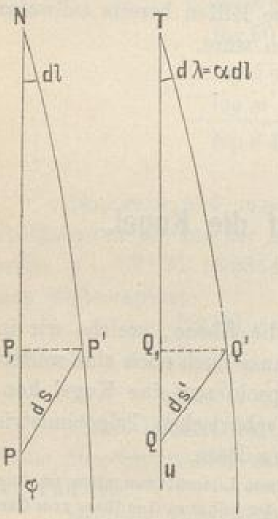
Ändern mussten wir in § 98. den Art. 13, welcher über Azimut-Reduktion handelt, weil hiebei Gauss die geodätische Linie als kürzeste Linie nach der Theorie der Variations-Rechnung einführt, die in unseren Gang (Geodätische Linie S. 367—376) nicht passt, weshalb wir eine andere Entwicklung § 98. an Stelle von Art. 13 gesetzt haben.

Dazu wurde in § 99. eine andere allgemeine Formel von Schols eingefügt.

§ 93. Grundformeln.

In Fig. 1. bezeichnet ds das Differential einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid und in Fig. 2. ist ds' das Differential eines entsprechenden Grosskreisbogens auf einer Kugel vom Halbmesser A. Im übrigen gelten folgende Bezeichnungen und daraus folgende Beziehungen:

Fig. 1. Ellipsoid. Fig. 2. Kugel.



	Ellipsoid	Kugel	
Punkt	P	Q	
Breite	φ	u	(1)
Längen-Unterschied	dl	$d\lambda = \alpha\, dl$	(2)

Hiebei ist α eine vorläufig eingeführte Konstante, deren Wert sich nachher ergeben wird. Weiter haben wir einander entsprechend:

Parallelbogen $P_1 P' = N \cos\varphi\, dl$ $\quad Q_1 Q' = A \cos u\, \alpha\, dl$ (3)

Meridianbogen $PP_1 = M\, d\varphi$ $\quad QQ_1 = A\, du$ (4)

Dabei sind M und N wie gewöhnlich die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids.

Wenn nun QQ_1Q' konforme Abbildung von PP_1P' sein soll, so müssen die Seiten der beiden Dreiecke ein konstantes Verhältnis haben, welches mit m bezeichnet sei, also:

$$\frac{A\, du}{M\, d\varphi} = \frac{\alpha\, A \cos u}{N \cos\varphi} = m \tag{5}$$

Hieraus erhält man als Beziehung zwischen der sphärischen Breite u und der sphäroidischen Breite φ die Differentialgleichung:

$$\frac{du}{d\varphi} = \alpha \frac{M}{N} \frac{\cos u}{\cos\varphi}$$

Das Krümmungs-Verhältnis $M:N$ wird nach (25) § 32. S. 197 eingeführt:

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{V^2} \text{ also } \frac{du}{d\varphi} = \frac{\alpha \cos u}{V^2 \cos \varphi} \tag{6}$$

oder in anderer Form, mit W^2 statt V^2 nach (25) § 32. S. 197:

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\alpha(1-e^2)}{W^2} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\alpha(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \tag{7}$$

Zur Integration zerlegen wir in Teilbrüche:

$$\frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{2}\frac{e^2\cos\varphi}{1+e\sin\varphi} - \frac{1}{2}\frac{e^2\cos\varphi}{1-e\sin\varphi}$$

Damit giebt die Integration von (7):

$$\log tang\left(45° + \frac{u}{2}\right) = \alpha\left\{\log tang\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2} e \log(1 + e\sin\varphi) + \frac{1}{2} e \log(1 - e\sin\varphi)\right\} - \log\frac{1}{k}$$

Dabei ist $-\log\frac{1}{k}$ als Integrations-Konstante zugesetzt; die vorstehende Gleichung lässt sich damit auch so schreiben:

$$tang\left(45° + \frac{u}{2}\right) = \frac{1}{k} tang^\alpha\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \tag{8}$$

Wenn diese Beziehung zwischen u und φ erfüllt ist, so wird m aus beiden Formeln (5) übereinstimmend erhalten, und zwar nach der zweiten Form von (5), mit Einsetzung von N nach (22) S. 197, $N = a : W$ also aus (5):

$$m = \frac{\alpha A \cos u}{N \cos\varphi} \quad , \quad m = \alpha \frac{A}{a} \frac{\cos u}{\cos\varphi} W \tag{9}$$

oder auch nach S. 189 und S. 197:

$$\frac{W}{a} = \frac{V}{c} \quad \text{also} \quad m = \frac{A\,\alpha \cos u}{c \cos\varphi} V \tag{10}$$

Die Beziehung zwischen den geographischen Längen l und λ ergiebt sich, da α konstant ist, nach (2) sofort:

$$\lambda = \alpha l \tag{11}$$

Die Gleichungen (8), (10) und (11) enthalten bereits die Lösung der gestellten Aufgabe im Grundzuge, und wir wollen im Anschluss an die umstehenden Fig. 3. und Fig. 4. die bis jetzt gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen:

Fig. 3. S. 488 stellt ein geodätisches Polar-Dreieck auf dem Ellipsoid vor, mit den Breiten φ und φ' und dem Längenunterschiede l; die geodätische Linie, welche die beiden Punkte mit den Breiten φ und φ' verbindet, hat die lineare Grösse s und die beiden Azimute α und α'.

Fig. 4. S. 488 ist das konforme sphärische Abbild von Fig. 3.; den Breiten φ und φ' entsprechen die sphärischen Breiten u und u' nach der Gleichung (8), der sphärische Längenunterschied $\lambda = \alpha l$ wird aus dem Längenunterschied l des Ellipsoids erhalten durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor α; und der Grosskreisbogen s' steht zu der geodätischen Linie s in Beziehung durch das Vergrösserungs-Verhältnis m, indem $s' = \int m\,ds$ sein muss.

Die Azimute β und β' auf der Kugel sind *nicht* genau gleich den Azimuten α und α' auf dem Ellipsoid, jedoch werden bei den nachfolgenden Anwendungen die β und α wenigstens nahezu einander gleich sein.

Fig. 3.
Ellipsoid.

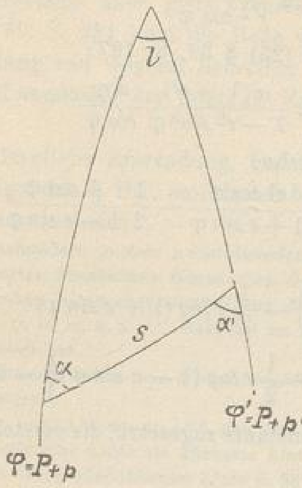
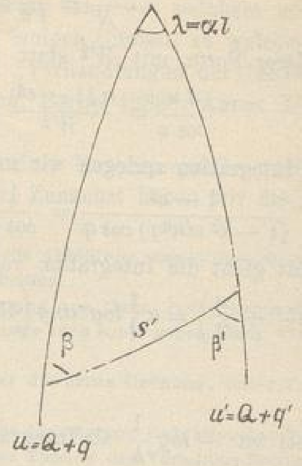


Fig. 4
Kugel mit dem Halbmesser 4.



Durch die Breiten-Bezeichnungen $\varphi = P + p$ und $u = Q + q$ ist angedeutet, dass P eine gewisse Normalbreite auf dem Ellipsoid und Q die entsprechende Normalbreite auf der Kugel ist, sowie dass p und q Breiten-Differenzen sind.

§ 94. Wahl der Konstanten.

Die Grundgleichungen (8), (10) und (11), welche am Schluss des vorigen § 93. gefunden wurden, enthalten drei willkürliche Konstanten, nämlich α, k und den Kugel-Halbmesser A.

Man hat nun in seiner Gewalt, durch zweckmässige Bestimmung dieser Konstanten α, k und A zu bewirken, dass für ein bestimmtes Gebiet die Abweichung des Vergrösserungs-Verhältnisses m von dem Wert 1 möglichst klein wird.

Zu diesem Zwecke nehmen wir einen etwa der Mitte des Gebietes zugehörigen Wert P der Breite φ an, welchem auch ein gewisser Wert Q der Breite u auf der Kugel entsprechen wird.

Indem wir zugleich auch die Bezeichnungen p und q für Breiten-Differenzen auf dem Ellipsoid und auf der Kugel einführen, haben wir, wie auch schon in Fig. 3. und Fig. 4. des vorigen § 93. eingeschrieben ist, die zusammengehörenden Bezeichnungen:

$$\text{Ellipsoid-Breite} \quad \varphi = P + p \tag{1}$$

$$\text{Kugel-Breite} \quad u = Q + q \tag{2}$$

In der Normalbreite P, bzw. Q soll das Vergrösserungs-Verhältnis $m = 1$, also $log\, m = 0$ sein, und für irgend welche andere Breite soll $log\, m$ bestimmt sein durch eine Reihe, deren erste Glieder die Ableitungen $\frac{d\, log\, m}{d\, u}$ und $\frac{d^2\, log\, m}{d\, u^2}$ sein werden.

Wir können nun über die drei Konstanten α, k und A so verfügen, dass auch diese beiden ersten Ableitungen für die Normalbreite verschwinden, wir haben also für die drei Konstanten α, k und A folgende drei Bedingungen:

$$\text{für } u = Q \text{ soll sein: } 1)\ m = 1 \text{ oder } log\, m = 0 \tag{3}$$

$$2)\ \frac{d\, log\, m}{d\, u} = 0 \tag{4}$$

$$3)\ \frac{d^2\, log\, m}{d\, u^2} = 0 \tag{5}$$