# Handbuch der Vermessungskunde

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 94. Wahl der Konstanten

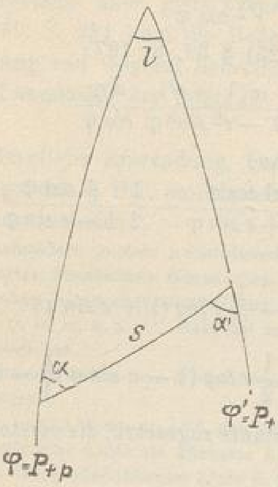

Fig. 3.
Ellipsoid.

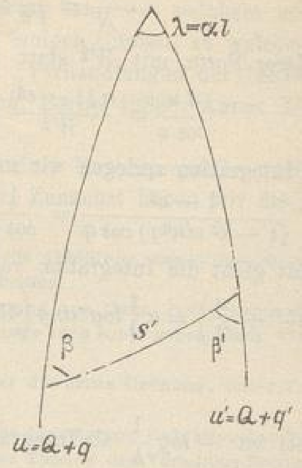

Fig. 4
Kugel mit dem Halbmesser 4.

Durch die Breiten-Bezeichnungen $\varphi = P + p$ und $u = Q + q$ ist angedeutet, dass $P$ eine gewisse Normalbreite auf dem Ellipsoid und $Q$ die entsprechende Normalbreite auf der Kugel ist, sowie dass $p$ und $q$ Breiten-Differenzen sind.

## § 94. Wahl der Konstanten.

Die Grundgleichungen (8), (10) und (11), welche am Schluss des vorigen §93. gefunden wurden, enthalten drei willkürliche Konstanten, nämlich $\alpha$, $k$ und den Kugel-Halbmesser $A$.

Man hat nun in seiner Gewalt, durch zweckmässige Bestimmung dieser Konstanten $\alpha$, $k$ und $A$ zu bewirken, dass für ein bestimmtes Gebiet die Abweichung des Vergrösserungs-Verhältnisses $m$ von dem Wert 1 möglichst klein wird.

Zu diesem Zwecke nehmen wir einen etwa der Mitte des Gebietes zugehörigen Wert $P$ der Breite $\varphi$ an, welchem auch ein gewisser Wert $Q$ der Breite $u$ auf der Kugel entsprechen wird.

Indem wir zugleich auch die Bezeichnungen $p$ und $q$ für Breiten-Differenzen auf dem Ellipsoid und auf der Kugel einführen, haben wir, wie auch schon in Fig. 3. und Fig. 4. des vorigen § 93. eingeschrieben ist, die zusammengehörenden Bezeichnungen:

$$\text{Ellipsoid-Breite} \quad \varphi = P + p \tag{1}$$

$$\text{Kugel-Breite} \quad u = Q + q \tag{2}$$

In der Normalbreite $P$, bzw. $Q$ soll das Vergrösserungs-Verhältnis $m = 1$, also $log\, m = 0$ sein, und für irgend welche andere Breite soll $log\, m$ bestimmt sein durch eine Reihe, deren erste Glieder die Ableitungen $\dfrac{d\, log\, m}{d\, u}$ und $\dfrac{d^2\, log\, m}{d\, u^2}$ sein werden.

Wir können nun über die drei Konstanten $\alpha$, $k$ und $A$ so verfügen, dass auch diese beiden ersten Ableitungen für die Normalbreite verschwinden, wir haben also für die drei Konstanten $\alpha$, $k$ und $A$ folgende drei Bedingungen:

$$\text{für } u = Q \text{ soll sein: } 1)\; m = 1 \text{ oder } log\, m = 0 \tag{3}$$

$$2)\; \frac{d\, log\, m}{d\, u} = 0 \tag{4}$$

$$3)\; \frac{d^2\, log\, m}{d\, u^2} = 0 \tag{5}$$

Hiernach haben wir uns zuerst mit den beiden ersten Ableitungen von $\log m$ zu beschäftigen, und nehmen zuerst von (10) und (6) § 93. S. 487 die zwei Gleichungen:

$$m = \frac{A}{c}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos\varphi}\,V \qquad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi} \tag{6}$$

und

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{V^2 \cos\varphi}{\alpha \cos u} \tag{7}$$

Durch Ableitung von $V$ erhält man, ebenso wie bei (13) §. 74. S. 393:

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{e'^2}{V}\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{\eta^2}{V}\tan\varphi \qquad (\text{wo } \eta^2 = e'^2\cos^2\varphi) \tag{8}$$

Nun giebt (6):

$$\log m = \log\frac{A\,\alpha}{c} + \log\cos u - \log\cos\varphi + \log V$$

$$\frac{d\log m}{du} = -\tan u + \tan\varphi\,\frac{V^2\cos\varphi}{\alpha\cos u} - \frac{\eta^2}{V}\tan\varphi\,\frac{V^3\cos\varphi}{\alpha\cos u}$$

$$\frac{d\log m}{du} = -\tan u + \frac{\sin\varphi}{\alpha\cos u} \tag{9}$$

$$\frac{d^2\log m}{du^2} = -\frac{1}{\cos^2 u} + \frac{1}{\alpha\cos^2 u}\left(\cos\varphi\,\frac{V^2\cos\varphi}{\alpha\cos u} + \sin\varphi\sin u\right)$$

$$\frac{d^2\log m}{du^2} = \frac{1}{\alpha^2\cos^2 u}(-\alpha^2 + V^2\cos^2\varphi + \alpha\sin\varphi\sin u) \tag{10}$$

Um nun die Bedingungen (3), (4) und (5) einzuführen, hat man in (6), (9) und (10) zu setzen: $\varphi = P$ und $u = Q$. Dieses giebt:

aus (6): $$1 = \frac{A}{c}\,\frac{\alpha\cos Q}{\cos P}\,V \qquad (\text{wo } V^2 = 1 + e'^2\cos^2 P) \tag{11}$$

aus (9): $$0 = -\tan Q + \frac{\sin P}{\alpha\cos Q} \tag{12}$$

aus (10): $$0 = -\alpha^2 + V^2\cos^2 P + \alpha\sin P\sin Q \tag{13}$$

Nun giebt sofort (12): $$\alpha\sin Q = \sin P \tag{14}$$

Dieses in (13) gesetzt giebt, mit Rücksicht auf $V^2$ in (11):

$$\alpha^2 = 1 + e'^2\cos^4 P \tag{15}$$

(14) giebt auch $\alpha^2\cos^2 Q = \alpha^2 - \sin^2 P$ und dieses nebst (15) in (11) gesetzt, giebt:

$$A = \frac{c}{V^2} = \frac{c}{1 + e'^2\cos^2 P} \tag{16}$$

Dieses ist nach (24) § 32. S. 197 der mittlere Krümmungs-Halbmesser in der Breite $P$. Aus (14) und (15) findet man auch:

$$\alpha^2\cos^2 Q = (1 + e'^2\cos^4 P) - (\sin^2 P) = \cos^2 P + e'^2\cos^4 P$$
$$= \cos^2 P(1 + e'^2\cos^2 P)$$
$$\alpha\cos Q = \cos P\,V \qquad \text{wobei } V^2 = 1 + e'^2\cos^2 P \tag{17}$$

Aus (14) und (17) folgt auch:

$$\tan Q = V\tan P \tag{17a}$$

Aus (15) und (16) haben wir also die Konstanten $\alpha$ und $A$, und durch (14) wird auch die dritte Konstante $k$ bestimmt, insofern dadurch $P$ und $Q$ miteinander verbunden sind; setzt man nun in (8) § 93. S. 487 $\varphi = P$ und $u = Q$, d. h. wendet man jene Gleichung auf die Normalbreite an, so erhält man:

$$k = \frac{\tan^\alpha\left(45° + \frac{P}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{Q}{2}\right)}\left(\frac{1 - e\sin P}{1 + e\sin P}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \tag{18}$$

Es bietet sich nun folgender Gang der Rechnung dar: Man nimmt eine Normalbreite $P$ auf dem Ellipsoid willkürlich an, berechnet damit den mittleren Krümmungs-Halbmesser $A$ nach (16), dann $\alpha$ nach (15), $Q$ nach (14) und endlich $k$ nach (18); dann kann man für jede Ellipsoidbreite $\varphi$ die zugehörige Kugelbreite $u$ und auch das zugehörige Vergrösserungsverhältnis $m$ nach (8) und (9) § 93. S. 487 berechnen.

Statt dessen kann man aber auch so verfahren, dass nicht eine Normalbreite $P$ auf dem Ellipsoid, sondern eine Normalbreite $Q$ auf der *Kugel* als willkürlich (runde Zahl) angenommen wird. In diesem Falle, der nicht wesentlich verschieden von dem ersten Falle ist, kann man aber nicht geradezu nach den Formeln (14) und (15) rechnen, sondern man muss aus (14) und (15) die Breite $P$ eliminieren, um $\alpha^2$ in $Q$ auszudrücken. Wenn man hiezu aus (14) nimmt:

$$\cos^4 P = (1 - \alpha^2 \sin^2 Q)^2 = 1 - 2\,\alpha^2 \sin^2 Q + \alpha^4 \sin^4 Q$$

und wenn man dieses in (15) einsetzt, so wird man auf eine Gleichung geführt, welche $\alpha^2$ und $\alpha^4$ enthält, und nach $\alpha^2$ aufgelöst dieses giebt:

$$\alpha^2 = \frac{1 + 2\,e'^2 \sin^2 Q - \sqrt{1 + 4\,e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q}}{2\,e'^2 \sin^4 Q} \tag{19}$$

Diese Gleichung (19) nebst (14) gestattet dann die Weiterrechnung in der früheren Weise.

Da aber die Formel (19) zur unmittelbaren Ausrechnung sehr wenig geeignet ist, d. h. unmittelbar angewendet keine scharfe Berechnung geben kann, empfiehlt es sich, sie in eine Reihe zu entwickeln nach S. 196:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1 + 4\,e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q} = 1 + \frac{4}{2}\,e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q - \frac{16}{8}\,e'^2 \sin^4 Q \cos^4 Q \\ + \frac{64}{16}\,e'^6 \sin^6 Q \cos^6 Q - \frac{5}{128}\,256\,e'^8 \sin^8 Q \cos^8 Q\end{aligned}\right|$$

Damit giebt (19) eine Reihe, deren drei erste Glieder sind:

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 Q - 2\,e'^4 \sin^2 Q \cos^6 Q + 5\,e'^6 \sin^4 Q \cos^8 Q \tag{20}$$

Damit ist alles zur Anwendung vorbereitet.

Es handelt sich um Einführung einer Normalbreite $P$ oder $Q$. Das nächstliegende wäre, die Ellipsoidbreite $P$ als runde Zahl für die Mitte des geographischen Anwendungsbereiches anzunehmen; aber Gauss hat einen sphärischen Normalwert $Q$ zu Grunde gelegt, nämlich:

$$\text{Kugel} \quad Q = 52^\circ\, 40'\, 0'' \tag{21}$$

Ausserdem werden von Gauss als Bessel sche Erddimensionen angenommen:

$$\log a = 6.514\,8235{\cdot}337 \text{ für Toisen}$$

und
$$\log a = 6.804\,6434{\cdot}637 \text{ für Meter} \tag{22}$$

$$\log \sqrt{1 - e^2} = 9.998\,5458{\cdot}202 \tag{23}$$

$$\log e = 8.912\,2052{\cdot}079 \qquad \log e^2 = 7.824\,4104\,158 \tag{24}$$

Diese Werte (23) und (24) sind dieselben wie die von uns in § 31. S. 190 angegebenen, während $\log e^2$ nach (24) in den letzten Stellen von unserer Annahme auf S. 191 abweicht. Dieses rührt von den Unsicherheiten her, welche früher überhaupt in Bezug auf die letzten Stellen der Bessel schen Erddimensionen bestanden haben (vgl. § 31. S. 190—191).

Die trigonometrische Abteilung der Preussischen Landesaufnahme hat von der ganzen Gauss schen Theorie der konformen Kugelabbildung mit ihren eigenen Konstanten (d. h. mit den auf S. 191 fett gedruckten Zahlen) eine Neuberechnung mit Tabellen durchgeführt, welche wohl später auch veröffentlicht werden wird.

Soweit wir im Folgenden eigene Berechnungen angeben, haben wir die Zahlen von S. 191 und S. 193 beibehalten, nämlich:

$$log\, a = 6.804\,6434{\cdot}637 \text{ für Meter} \tag{25}$$

$$log\, c = 6.806\,0976{\cdot}435 \quad " \quad " \tag{26}$$

$$log\, e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237 \quad , \quad log\, e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833 \tag{27}$$

$$log(1-e^2) = log\frac{1}{1+e'^2} = 9.997\,0916{\cdot}404 \tag{28}$$

Damit wollen wir die übrigen Konstanten nach den vorstehenden Formeln ausrechnen. Als willkürliche Annahme wird zu Grunde gelegt, wie bei (21) angegeben:

$$\text{Normal-Kugelbreite} \quad Q = 52°\,40'\,0'' \tag{29}$$

Damit berechnet man $\alpha^2$ nach der Reihe (20):

$$\alpha^2 = 1{,}00090\,88703 - 28399 + 111 = 1{,}00090\,60415$$

$$log\, \alpha = 0.000\,1966{\cdot}553 \tag{30}$$

$$\alpha = 1 + 0{,}000\,425\,918 \qquad \frac{1}{\alpha} = 1 - 0{,}000\,452\,713 \tag{31}$$

Es folgt die Berechnung von $P$ nach (14); man findet:

$$P = 52°\,42'\,2{,}53251'' \tag{32}$$

$$log sin\, P = 9.900\,6297{\cdot}679 \quad , \quad log cos\, P = 9.782\,4573{\cdot}113 \quad , \quad log tang\, P = 0.118\,1724{\cdot}566$$

Mit $cos\, P$ hat man auch:

$$log\, e'^2\, cos^2\, P = log\, \eta^2 = 7.392\,2334{\cdot}059 \tag{33}$$

und damit kann man geradezu $V^2 = 1 + \eta^2$ berechnen:

$$log\, V^2 = 0.001\,0702.432 \quad , \quad log\, V = 0.000\,5351{\cdot}216 \tag{34}$$

Zur Probe kann man auch $log\, V^2$ nach der Formel (24) S. 211 berechnen, oder $log\, V$ durch Interpolation aus der Hilfstafel S. [57] des Anhangs bestimmen; beides giebt dasselbe Ergebnis wie (34).

Ehe man weiter geht, kann man auch die Probe nach (17), $\alpha\, cos\, Q = V\, cos\, P$ anstellen, welche mit einem Fehler von 0·001 schliesst, der nicht weiter zu verfolgen ist.

Mit $log\, V^2$ nach (34) hat man auch nach (16) den Kugelhalbmesser $A$, die Ausrechnung mit (26) und (34) giebt:

$$log\, A = 6.805\,0274{\cdot}003 \tag{35}$$

Endlich ist auch noch $k$ nach (18) zu berechnen, man hat hiezu $e\, sin\, P = 0{,}064\,988\,270\,546$ und weiter:

$$\left.\begin{array}{rl} log\left(\dfrac{1-e\, sin\, P}{1+e\, sin\, P}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} & 9.997\,6898{\cdot}845 \\ log\, tang^{\alpha}\left(45° + \dfrac{P}{2}\right) & 9.471\,9371{\cdot}356 \\ log\, cotg\left(45° + \dfrac{Q}{2}\right) & 9.528\,7020{\cdot}994 \end{array}\right\} \begin{array}{l} log\, k = 9.998\,3291{\cdot}195 \\ log\dfrac{1}{k} = 0.001\,6708{\cdot}805 \end{array}$$

$$\text{Gauss giebt } log\frac{1}{k} = 0.001\,6708{\cdot}804 \tag{36}$$

Hier haben wir die unerhebliche Differenz 0.001 gegen die Angabe von Gauss in Art. 6. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“, während die anderen Konstanten $P$, $log\, \alpha$, $log\, A$ nach (32), (30), (35) bis auf die letzte Dezimale mit den Angaben von Gauss stimmen.

Dieses ist eine Versicherung, dass die Verschiedenheit der Werte $log\, e^2$ in (24) und (27) sich in den Konstanten $P$, $\alpha$, $A$ und $k$ bei Rechnung mit 10stelligen Logarithmen nicht mehr bemerklich macht; während in den späteren Coëfficienten-Berechnungen, wenn der Faktor $\eta^2$ auftritt, die kleine Verschiedenheit in den Annahmen von $e^2$ bzw. $e'^2$ bemerklich wird.

Wir haben früher auch ein Zahlenbeispiel zur Bestimmung von $u$ und $m$ bei gegebenem $\varphi$ durchgerechnet, nach den Grundformeln (8) und (10) § 93. S. 487. Die Einzelheiten dieser Rechnung waren in den früheren Auflagen, z. B. 3. Aufl. 1890, S. 431—432 angegeben, wir wollen hier nur noch das Ergebnis dieser Rechnung hersetzen, für die Karlsruher Breite:

$$\varphi = 49^\circ\, 0'\, 0'' \qquad u = 48^\circ\, 58'\, 18{,}08'' \qquad \log m = 0.000\,0002{\cdot}7 \tag{37}$$

Die genaueren Werte hiefür, welche man aus der Hilfstafel S. [60] des Anhangs durch Interpolation finden kann, sind:

$$\varphi = 49^\circ\, 0'\, 0'' \qquad u = 48^\circ\, 58'\, 18{,}0784'' \qquad \log m = 0.000\,0002{\cdot}48 \tag{38}$$

Die Übereinstimmung zwischen (37) und (38) ist insofern hinreichend, als die Werte $u$ und $\log m$ von (37) nur mit 7stelligen Logarithmen ($\pm\, 0{\cdot}25$) gerechnet sind.

Die Rechnung nach den geschlossenen Formeln (8) und (10) § 93. S. 487 ist umständlich und verhältnismässig ungenau.

Ein besseres Rechnungs-Verfahren erhält man durch Reihen-Entwicklungen, zu welchen wir in § 96.—97. übergehen werden.

## § 95. Goniometrische Hilfsgrössen.

Unsere vorstehenden Entwicklungen und Berechnungen zur Bestimmung der Konstanten in den Grundformeln sind sachlich nichts anderes, als was Gauss in Art. 3.—5. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung“ gegeben hat. In der Form aber sind wir von Gauss abgewichen, indem wir die bisherigen Bezeichnungen unseres Buches, namentlich $V^2 = 1 + \eta^2$ mit $\eta^2 = e'^2 \cos \varphi^2$ beibehielten, und dann die Ausrechnung auf dem zuerst sich darbietenden Wege machten; und da wir damit den Gauss schen Zahlenwerten innerhalb der Genauigkeit 10stelliger Logarithmen-Rechnung gleichgekommen sind, wäre nichts weiter zu bemerken.

Nun hat aber Gauss in Art. 4. der „Untersuchungen“ u. s. w. eine Gruppe von goniometrischen Hilfsgrössen, $\varphi$, $\zeta$, $\eta$, $\Theta$ eingeführt, welche dazu dienen sollen, die logarithmischen Rechnungen bequemer und schärfer zu machen, deren Zusammenhang unter sich und mit den übrigen Grössen $e$, $P$, $Q$ nicht sofort einzusehen ist.

Dieser Zusammenhang ist uns durch eine sphärische Figur am besten klar geworden, welche wir in Fig. 1. S. 493 nebst den zugehörigen Gleichungen mitteilen.

Dabei behalten wir die Gauss sche Numerierung der Gleichungen bei, indem z. B. die Nummern (13), (14) u. s. w. der Gauss schen Original-Abhandlung „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung“ entsprechen.

Es wird zuerst ein Hilfswinkel $\varphi$ eingeführt durch die Gleichung:

$$\sin \varphi = e \tag{13}$$

damit wird:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \tan^2 \varphi$$

Folglich nach (15) § 94. S. 489:

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 P = 1 + \tan^2 \varphi \cos^4 P$$

Nun setzt man abermals:

$$\tan \varphi \cos^2 P = \tan \zeta \tag{14}$$

folglich:

$$\alpha^2 = 1 + \tan^2 \zeta \quad , \quad \alpha = \frac{1}{\cos \zeta} \tag{16}$$