Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 95. Goniometrische Hilfsgrössen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Wir haben früher auch ein Zahlenbeispiel zur Bestimmung von u und m bei gegebenem φ durchgerechnet, nach den Grundformeln (8) und (10) § 93. S. 487. Die Einzelheiten dieser Rechnung waren in den früheren Auflagen, z. B. 3. Aufl. 1890, S. 431—432 angegeben, wir wollen hier nur noch das Ergebnis dieser Rechnung hersetzen, für die Karlsruher Breite:

$$\varphi = 49^\circ\, 0'\, 0'' \qquad u = 48^\circ\, 58'\, 18{,}08'' \qquad \log m = 0.000\,0002{\cdot}7 \tag{37}$$

Die genaueren Werte hiefür, welche man aus der Hilfstafel S. [60] des Anhangs durch Interpolation finden kann, sind:

$$\varphi = 49^\circ\, 0'\, 0'' \qquad u = 48^\circ\, 58'\, 18{,}0784'' \qquad \log m = 0.000\,0002{\cdot}48 \tag{38}$$

Die Übereinstimmung zwischen (37) und (38) ist insofern hinreichend, als die Werte u und $\log m$ von (37) nur mit 7stelligen Logarithmen ($\pm$ 0·25) gerechnet sind.

Die Rechnung nach den geschlossenen Formeln (8) und (10) § 93. S. 487 ist umständlich und verhältnismässig ungenau.

Ein besseres Rechnungs-Verfahren erhält man durch Reihen-Entwicklungen, zu welchen wir in § 96.—97. übergehen werden.

§ 95. Goniometrische Hilfsgrössen.

Unsere vorstehenden Entwicklungen und Berechnungen zur Bestimmung der Konstanten in den Grundformeln sind sachlich nichts anderes, als was Gauss in Art. 3.—5. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung" gegeben hat. In der Form aber sind wir von Gauss abgewichen, indem wir die bisherigen Bezeichnungen unseres Buches, namentlich $V^2 = 1 + \eta^2$ mit $\eta^2 = e'^2 \cos \varphi^2$ beibehielten, und dann die Ausrechnung auf dem zuerst sich darbietenden Wege machten; und da wir damit den Gauss schen Zahlenwerten innerhalb der Genauigkeit 10stelliger Logarithmen-Rechnung gleichgekommen sind, wäre nichts weiter zu bemerken.

Nun hat aber Gauss in Art. 4. der „Untersuchungen" u. s. w. eine Gruppe von goniometrischen Hilfsgrössen, φ, ζ, η, Θ eingeführt, welche dazu dienen sollen, die logarithmischen Rechnungen bequemer und schärfer zu machen, deren Zusammenhang unter sich und mit den übrigen Grössen e, P, Q nicht sofort einzusehen ist.

Dieser Zusammenhang ist uns durch eine sphärische Figur am besten klar geworden, welche wir in Fig. 1. S. 493 nebst den zugehörigen Gleichungen mitteilen.

Dabei behalten wir die Gauss sche Numerierung der Gleichungen bei, indem z. B. die Nummern (13), (14) u. s. w. der Gauss schen Original-Abhandlung „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung" entsprechen.

Es wird zuerst ein Hilfswinkel φ eingeführt durch die Gleichung:

$$\sin \varphi = e \tag{13}$$

damit wird:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \tan^2 \varphi$$

Folglich nach (15) § 94. S. 489:

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 P = 1 + \tan^2 \varphi \cos^4 P$$

Nun setzt man abermals:

$$\tan \varphi \cos^2 P = \tan \zeta \tag{14}$$

folglich:

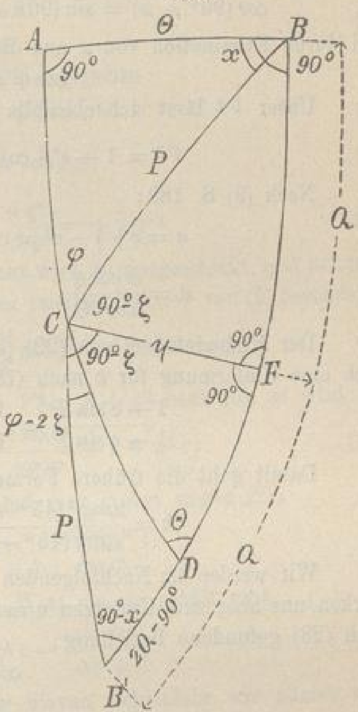
$$\alpha^2 = 1 + \tan^2 \zeta \quad , \quad \alpha = \frac{1}{\cos \zeta} \tag{16}$$

Weiter wird gesetzt:

$$e \sin P = \sin \Theta \tag{22}$$

Die durch (13), (14) und (22) eingeführten Hilfswinkel φ, ζ und Θ lassen sich nebst den Breiten P und Q in einer sphärischen Figur vereinigen, welche in Fig. 1. gezeichnet ist. Man hat hiebei den Bogen $AB = \Theta$, auf welchem die Bögen AD und BD rechtwinklig aufgesetzt sind, so dass D der Pol von AB ist, also bei D der Winkel Θ wieder erscheint.

Fig. 1.



Nach (13) und (22) ist $BC = P$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC, dessen eine Kathete $AB = \Theta$ und dessen Winkel bei $C = \varphi$ ist. Dadurch ist der Punkt C bestimmt und es wird von ihm eine Senkrechte CF auf BD gefällt, ferner $FB' = FB$ abgetragen, so dass BCB' ein gleichschenkliges Dreieck wird. Dass der bei C eingeschriebene Winkel $BCF = 90° - \zeta$ in Übereinstimmung mit (14) ist, zeigt sich so:

Dreieck CBF giebt

$$\cos P = \operatorname{cotg}(90° - \zeta) \operatorname{cotg}(90° - x)$$

Dreieck CBA giebt $\cos P = \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cotg} x$ woraus durch Multiplikation die Gleichung (14) folgt.

Von (14) und (16) haben wir:

$$\sin Q = \sin P \cos \zeta \tag{17}$$

Dieses entspricht dem rechtwinkligen Dreieck BCF als Sinus-Gleichung, ausführlich geschrieben:

$$\sin Q = \sin P \sin (90° - \zeta)$$

Nun haben wir das Recht, aus der sphärischen Figur, Fig. 1. beliebige Gleichungen herauszulesen, welche die gleiche Berechtigung haben, wie wenn sie aus den bisherigen Gleichungen rein goniometrisch abgeleitet wären. Die Senkrechte $CF = \eta$ wird aus dem rechtwinkligen Dreieck CFB erhalten durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \eta = \sin \zeta \operatorname{tang} P \tag{15}$$

Dasselbe Dreieck CFB giebt auch:

$$\cos \eta \cos Q = \cos P \tag{18}$$

und

$$\sin \eta = \operatorname{tang} \zeta \operatorname{tang} Q \tag{19}$$

und wenn man auf dasselbe Dreieck CFB eine der Gleichungen anwendet, welche durch Division der zweiten und vierten Gauss schen Gleichungen von § 27. S. 165 entsteht, so bekommt man:

$$\operatorname{tang} \frac{P-Q}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}\left(90° - (90° - \zeta)\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(90° + (90° - \zeta)\right)} \operatorname{tang} \frac{\eta}{2}$$

$$\operatorname{tang} \frac{P-Q}{2} = \operatorname{tang} \frac{\zeta}{2} \operatorname{tang} \frac{\eta}{2} \tag{20}$$

Das Dreieck $C\,D\,B'$ giebt:

$$\frac{\sin(\varphi - 2\,\zeta)}{\sin(2\,Q - 90^\circ)} = \frac{\sin\Theta}{\sin P}$$

Dann wegen (22) und (13):

$$\sin(2\,\zeta - \varphi) = e \cos 2\,Q = \sin\varphi \cos 2\,Q \tag{21}$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken $A\,B\,C$ und $B\,C\,F$ findet man:

$$\cos\varphi = \sin x \cos\Theta$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin(90^\circ - \zeta)\cos\eta \quad , \quad \text{oder } \sin x = \cos\zeta \cos\eta$$

und durch Elimination von x aus diesen beiden Gleichungen:

$$\cos\varphi = \cos\zeta \cos\eta \cos\Theta \tag{23}$$

Unser V^2 lässt sich ebenfalls in φ und Θ ausdrücken. Nach (22) und (13) ist:

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P = \frac{1 - e^2 \sin^2 P}{1 - e^2} = \frac{\cos^2\Theta}{\cos^2\varphi}$$

Nach (9) S. 189:

$$a = c\sqrt{1 - e^2} = c \cos\varphi \quad \text{dazu} \quad A = \frac{c}{V^2}, \quad \text{also:}$$

$$A = \frac{a \cos\varphi}{\cos^2\Theta}$$

Der Hilfswinkel Θ von (22) (s. oben bei (16), nämlich $\sin\Theta = e \sin P$, giebt auch eine Umformung für k nach (18) § 94., nämlich zunächst nach (22):

$$\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P} = \frac{1 - \sin\Theta}{1 + \sin\Theta} = cotg^2\left(\frac{90^\circ + \Theta}{2}\right)$$

Damit geht die frühere Formel für k von (18) § 94. über in:

$$k = \frac{tang^\alpha(45^\circ + 1/_2\,P)}{tang(45^\circ + 1/_2\,Q)}\, cotg^{\alpha e}(45^\circ + 1/_2\,\Theta)$$

Wir werden im Nachfolgenden die goniometrischen Hilfsgrössen nicht anwenden, merken uns aber zum Umsetzen unserer Bezeichnungen in jene, hauptsächlich die oben nach (23) gefundene Beziehung:

$$\cos\Theta = V \cos\varphi$$

§. 96. Reihen-Entwicklung für die Breiten-Differenz.

Die Beziehung zwischen der Breite φ auf dem Ellipsoid und der zugehörigen Breite u auf der Kugel ist zwar durch die Gleichung (8) § 93. S. 487 gegeben, welche zu jedem Werte φ den zugehörigen Wert u berechnen lässt; allein mancherlei Bedürfnisse werden dadurch doch nicht befriedigt; jene geschlossene Formel ist zur Rechnung überhaupt unbequem (vgl. das Zahlenbeispiel § 94. S. 492), und kann zur Auflösung nach φ bei gegebenem u nur etwa indirekt benützt werden. Dieses und andere Gründe machen eine Reihen-Entwicklung erwünscht.

Da auf dem Ellipsoid eine Normalbreite P und auf der Kugel eine Normalbreite Q angenommen wurde, sollen die Breiten allgemein durch ihre Differenzen gegen P und Q ausgedrückt werden, d. h. wir setzen nach § 94. (1) und (2) S. 488:

$$\text{Ellipsoid} \quad \varphi = P + p \tag{1}$$

$$\text{Kugel} \quad u = Q + q \tag{2}$$

Da die Beziehung zwischen P und Q bekannt ist, handelt es sich jetzt nur noch um eine Beziehung zwischen p und q, welche in zwei Formen aufgestellt werden kann, nämlich: