Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 96. Reihen-Entwicklung für die Breiten-Differenz

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Das Dreieck $C\,D\,B'$ giebt:

$$\frac{\sin(\varphi - 2\,\zeta)}{\sin(2\,Q - 90^\circ)} = \frac{\sin\Theta}{\sin P}$$

Dann wegen (22) und (13):

$$\sin(2\,\zeta - \varphi) = e\cos 2\,Q = \sin\varphi\cos 2\,Q \tag{21}$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken $A\,B\,C$ und $B\,C\,F$ findet man:

$$\cos\varphi = \sin x\cos\Theta$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin(90^\circ - \zeta)\cos\eta \quad , \quad \text{oder } \sin x = \cos\zeta\cos\eta$$

und durch Elimination von x aus diesen beiden Gleichungen:

$$\cos\varphi = \cos\zeta\cos\eta\cos\Theta \tag{23}$$

Unser V^2 lässt sich ebenfalls in φ und Θ ausdrücken. Nach (22) und (13) ist:

$$V^2 = 1 + e'^2\cos^2 P = \frac{1 - e^2\sin^2 P}{1 - e^2} = \frac{\cos^2\Theta}{\cos^2\varphi}$$

Nach (9) S. 189:

$$a = c\sqrt{1 - e^2} = c\cos\varphi \quad \text{dazu} \quad A = \frac{c}{V^2}, \quad \text{also:}$$

$$A = \frac{a\cos\varphi}{\cos^2\Theta}$$

Der Hilfswinkel Θ von (22) (s. oben bei (16), nämlich $\sin\Theta = e\sin P$, giebt auch eine Umformung für k nach (18) § 94., nämlich zunächst nach (22):

$$\frac{1 - e\sin P}{1 + e\sin P} = \frac{1 - \sin\Theta}{1 + \sin\Theta} = cotg^2\left(\frac{90^\circ + \Theta}{2}\right)$$

Damit geht die frühere Formel für k von (18) § 94. über in:

$$k = \frac{tang^\alpha(45^\circ + {}^1\!/_2\,P)}{tang(45^\circ + {}^1\!/_2\,Q)}\,cotg^\alpha e\,(45^\circ + {}^1\!/_2\,\Theta)$$

Wir werden im Nachfolgenden die goniometrischen Hilfsgrössen nicht anwenden, merken uns aber zum Umsetzen unserer Bezeichnungen in jene, hauptsächlich die oben nach (23) gefundene Beziehung:

$$\cos\Theta = V\cos\varphi$$

§. 96. Reihen-Entwicklung für die Breiten-Differenz.

Die Beziehung zwischen der Breite φ auf dem Ellipsoid und der zugehörigen Breite u auf der Kugel ist zwar durch die Gleichung (8) § 93. S. 487 gegeben, welche zu jedem Werte φ den zugehörigen Wert u berechnen lässt; allein mancherlei Bedürfnisse werden dadurch doch nicht befriedigt; jene geschlossene Formel ist zur Rechnung überhaupt unbequem (vgl. das Zahlenbeispiel § 94. S. 492), und kann zur Auflösung nach φ bei gegebenem u nur etwa indirekt benützt werden. Dieses und andere Gründe machen eine Reihen-Entwicklung erwünscht.

Da auf dem Ellipsoid eine Normalbreite P und auf der Kugel eine Normalbreite Q angenommen wurde, sollen die Breiten allgemein durch ihre Differenzen gegen P und Q ausgedrückt werden, d. h. wir setzen nach § 94. (1) und (2) S. 488:

$$\text{Ellipsoid} \quad \varphi = P + p \tag{1}$$

$$\text{Kugel} \quad u = Q + q \tag{2}$$

Da die Beziehung zwischen P und Q bekannt ist, handelt es sich jetzt nur noch um eine Beziehung zwischen p und q, welche in zwei Formen aufgestellt werden kann, nämlich:

entweder:
$$p = \frac{d\,\varphi}{d\,u}\Big]\, q + \frac{d^2\,\varphi}{d\,u^2}\Big]\, \frac{q^2}{2} + \frac{d^3\,\varphi}{d\,u^3}\Big]\, \frac{q^3}{6} + \dots \tag{3}$$

oder:
$$q = \frac{d\,u}{d\,\varphi}\Big]\, p + \frac{d^2\,u}{d\,\varphi^2}\Big]\, \frac{p^2}{2} + \frac{d^3\,u}{d\,\varphi^3}\Big]\, \frac{p^3}{6} + \dots \tag{4}$$

Dabei soll das Zeichen] andeuten, dass nach Ausführung der Differentiierungen, $p = 0$ und $q = 0$, oder $\varphi = P$ und $u = Q$ zu setzen sei.

Wir wollen zuerst die Form (4) vornehmen und haben hiezu von (6) § 93. S. 487:

$$\frac{d\,u}{d\,\varphi} = \frac{1}{V^2}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \tag{5}$$

Hiebei ist, wie schon früher in § 34. S. 208 angegeben:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \tag{6}$$

$$\frac{d\,V}{d\,\varphi} = -\frac{\eta^2}{V}\,t \qquad (t = tang\,\varphi) \tag{7}$$

$$\frac{d\,V^n}{d\,\varphi} = -\,n\,\eta^2\,V^{n-2}\,t \quad \text{und} \quad \frac{d\,\eta^n}{d\,\varphi} = -\,n\,\eta^n\,t \tag{8}$$

Dieses haben wir, weil es wiederholt gebraucht wird, vorausgeschickt, und nehmen die ebenfalls mehrfach vorkommende Ableitung des zweiten Faktors von (5) besonders:

$$\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right) = \frac{1}{\cos^2 \varphi}\left(-\,\alpha \sin u\,\frac{d\,u}{d\,\varphi}\cos\varphi + \alpha \cos u \sin \varphi\right) \tag{9}$$

Setzt man hier (5) ein, und berücksichtigt $V^2 = 1 + \eta^2$ nach (6), so wird:

$$\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right) = \frac{1}{V^2}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\left(-\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} + t + \eta^2\,t\right) \tag{10}$$

Wenn man nun (5) nochmals ableitet, so hat man zuerst wegen (8):

$$\frac{d^2\,u}{d\,\varphi^2} = \frac{2\,\eta^2}{V^4}\,t\,\frac{\alpha \cos u}{\cos\varphi} + \frac{1}{V^2}\,\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right)$$

Setzt man den bereits in (9) vorbereiteten Wert ein, so erhält man:

$$\frac{d^2\,u}{d\,\varphi^2} = \frac{1}{V^4}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos\varphi}\left(t + 3\,\eta^3\,t - \frac{\alpha \sin u}{\cos\varphi}\right) \tag{11}$$

Als Vorbereitung der nächsten Ableitung hievon behandeln wir zuerst den letzten Teil, und finden in ähnlicher Weise wie oben bei (9) und (10):

$$\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{a \sin u}{\cos\varphi}\right) = \frac{1}{V^2}\left(\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos\varphi}\right)^2 + \frac{\alpha \sin u}{\cos\varphi}\,t\,(1 + \eta^2)\right) \tag{12}$$

Nun giebt (11) weiter:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^3\,u}{d\,\varphi^3} &= \frac{4\,\eta^2}{V^6}\,t\,\frac{\alpha \cos u}{\cos\varphi}\left(t + 3\,\eta^2\,t - \frac{\alpha \sin u}{\cos\varphi}\right)\\
&+ \frac{1}{V^4}\,\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos\varphi}\right)\left(t + 3\,\eta^2\,t - \frac{\alpha \sin u}{\cos\varphi}\right)\\
&+ \frac{1}{V^4}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos\varphi}\left((1 + t^2) - 6\,\eta^2\,t^2 + 3\,\eta^2\,(1 + t^2) - \frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\alpha \sin u}{\cos\varphi}\right)\right)
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Da wir bei der dritten Potenz stehen bleiben wollen, handelt es sich jetzt darum, alle die Substitutionen zu machen, welche bei (3) und (4) durch] angedeutet sind, d. h. $\varphi = P$, $u = Q$ zu setzen. Es ist aber nach (14) und (17) § 94. S. 489 $\alpha \sin Q = \sin P$ und $\alpha \cos Q = V \cos P$, und daraus folgt:

$$\frac{\alpha \sin u}{\sin\varphi}\Big] = 1 \qquad \frac{\alpha \sin u}{\cos\varphi}\Big] = t \qquad \frac{\alpha \cos u}{\cos\varphi}\Big] = V \tag{14}$$

und dieses in (10) und (12) gesetzt, giebt (da $V^2 = 1 + \eta^2$ ist):

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\Big] = \frac{\eta^2 t}{V} \qquad \frac{d}{d\varphi}\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\Big] = 1 + t^2 \tag{15}$$

Wenn man diese (14) und (15) in den drei allgemeinen Ableitungen (5), (11) und (13) einsetzt, so ziehen sich diese Ableitungen sehr zusammen, und wenn man alles gleichartige zusammen ordnet, so erhält man:

$$\frac{du}{d\varphi}\Big] = \frac{1}{V} \quad , \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2}\Big] = \frac{3\,\eta^2}{V^3}\,t \tag{16}$$

$$\frac{d^3 u}{d\varphi^3}\Big] = \frac{3\,\eta^2}{V^5}\,(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2) \tag{17}$$

Mit diesen (16) und (17) kann man die Formel (4) zusammensetzen:

$$q = \frac{1}{V}\,p + \frac{3}{2}\,\frac{\eta^2 t}{V^3}\,p^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\eta^2}{V^5}\,(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2)\,p^3 \tag{18}$$

Auf ähnlichem Wege wie diese Reihe, welche nach Potenzen von p fortschreitet, kann man auch die umgekehrte Reihe (3) finden, welche nach Potenzen von q fortschreitet und p bestimmt; indessen, wenn wir nicht weiter als bis zur dritten Ordnung gehen, bekommen wir die umgekehrte Reihe auch dadurch, dass wir geradezu die Reihe (18) stufenweise umkehren (vgl. § 29. S. 179—181). In erster Näherung giebt (18):

$$p = q\,V + q^2 \ldots \quad , \quad p^2 = q^2\,V^2 + q^3 \ldots$$

$$p = q\,V - \frac{3}{2}\,q^2\,\eta^2\,t \quad , \quad p^2 = q^2\,V^2 - 3\,q^3\,V\,\eta^2\,t +$$

Dieses p^2 und $p^3 = q^3\,V^3$, in (18) eingesetzt, und alles nach gleichen Potenzen geordnet, giebt sofort:

$$p = q\,V - \frac{3}{2}\,\eta^2\,q^2\,t + \frac{1}{2}\,\frac{\eta^2}{V}\,(-1 + t^2 - \eta^2 + 5\,\eta^2 t^2)\,q^3 \tag{19}$$

In den Reihen (18) und (19) sind p und q in analytischem Masse verstanden; wir wollen nun statt dessen die unabhängige Veränderliche p in (18), q in (19) in Graden, und die Funktion q oder p in Sekunden zählen; dann nehmen die Reihen (18) und (19) folgende Formen an (welche (6) und (5) S. 485 entsprechen):

$$q = \frac{3600}{V}\,p + \frac{3600}{\varrho^\circ}\,\frac{3}{2}\,\frac{\eta^2 t}{V^3}\,p^2 - \frac{3600}{\varrho^{\circ 2}}\,\frac{\eta^2}{2\,V^5}\,(-1 + t^2 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)\,p^3 \tag{20}$$

$$p = 3600\,V\,q - \frac{3600}{\varrho^\circ}\,\frac{3}{2}\,\eta^2\,t\,q^2 + \frac{3600}{\varrho^{\circ 2}}\,\frac{\eta^2}{2\,V}\,(-1 + t^2 - \eta^2 + 5\,\eta^2 t^2)\,q^3 \tag{21}$$

Wenn man hier die Coëfficienten mit den Konstanten von § 94. ausrechnet, so bekommt man:

$$q = 3595{,}566\,945\,p + 0{,}304\,138\,6587\,p^2 - 0{,}000\,946\,265\,801\,p^3 + \ldots \tag{22}$$

$$p = 3604{,}438\,521\,q - 0{,}305\,264\,9836\,q^2 + 0{,}001\,002\,642\,525\,q^3 + \ldots \tag{23}$$

Wenn man diese Reihen als konvergierend und mit der dritten Potenz abbrechend behandeln will, so braucht man die Coëfficienten nicht mit so vielen Stellen; wir haben jedoch viele Stellen ausgerechnet zur Vergleichung mit den Zahlenangaben von Gauss, welcher in Art. 6. und Art. 8. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie die Reihen bis zur fünften Potenz ausgeführt giebt. Insbesondere die zur Tafel-Berechnung von Gauss angegebene Reihe von Art. 8. ist

$$\left.\begin{array}{rll} p - q = & 443{,}852\,122 \dfrac{q}{100} & \\ & - 3952{,}649\,780 \left(\dfrac{q}{100}\right)^2 & [3.484\,6769{\cdot}820] \\ & + 1002{,}642\,506 \left(\dfrac{q}{100}\right)^3 & [3.001\,1461{\cdot}121] \\ & + 4119{,}589\,282 \left(\dfrac{q}{100}\right)^4 & [3.614\,8539{\cdot}196] \\ & - \ 431{,}181\,623 \left(\dfrac{q}{100}\right)^5 & [2.634\,661] \end{array}\right\} \quad (24)$$

Die Anwendung dieser Reihe auf $q = -7°$ und $q = +7°$ giebt:

$u = Q + q =$	$45°\ 40'\ 0''$	$59°\ 40'\ 0''$
	$q = -7°$	$q = +7°$
	$-31{,}069\,995''$	$+31{,}069\,965$
	$-14{,}957\,984$	$-14{,}957\,984$
	$-\ 0{,}343\,906$	$+\ 0{,}343\,906$
	$+\ 0{,}098\,911$	$+\ 0{,}098\,911$
	$+\ 0{,}000\,725$	$-\ 0{,}000\,725$
$p - q =$	$-46{,}272\,219$	$+16{,}554\,073$
$p =$	$-7°\ 0'\ 46{,}272\,219''$,	$+\ 7°\ 0'\ 16{,}554\,073''$
hiezu $P =$	$52°\ 42'\ 2{,}53251''$	$52°\ 42'\ 2{,}53251''$
$\varphi = P + p =$	$45°\ 41'\ 16{,}26029''$	$59°\ 42'\ 19{,}08658''$

Diese Werte liegen bereits jenseits der Grenzen der Gauss schen Tafel, von der wir einen an den Grenzen etwas erweiterten Auszug auf Seite [60]—[61] des Anhangs gegeben haben.

Da das letzte Rechnungsglied immer noch 0,0007″ ausmacht, und die Konvergenz nicht sehr stark ist, kann man schliessen, dass für die Genauigkeit von 0,00001″, welche Gauss seiner Tafel gegeben hat, die Werte $q = -7°$ und $q = +7°$ als äusserste Grenzen zu betrachten sind.

§ 97. Reihen-Entwicklung für das Vergrösserungs-Verhältnis.

Das Vergrösserungs-Verhältnis ist nach (10) § 93. S. 487:

$$m = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} V \tag{1}$$

In der Normalbreite $\varphi = P$ (und $u = Q$) ist dieses Verhältnis $m = 1$; und wenn, wie bisher, irgend eine Breite auf der Kugel $u = Q + q$ gesetzt wird, so wird für irgend eine solche Breite sich das Verhältnis m als Funktion von q darstellen lassen, oder die Reihe für $\log m$ habe zunächst diese Form:

$$\log m = \left.\frac{d \log m}{d q}\right] q + \left.\frac{d^2 \log m}{d q^2}\right] \frac{q^2}{2} + \left.\frac{d^3 \log m}{d q^3}\right] \frac{q^3}{6} + \ldots \tag{2}$$

Da aber die beiden ersten Ableitungen von $\log m$ gleich Null gesetzt wurden (4) und (5) § 94. S. 488), so zieht sich (2) zusammen auf:

$$\log m = \left.\frac{d^3 \log m}{d q^3}\right] \frac{q^3}{6} + q^4 \ldots \tag{3}$$