Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 97. Reihen-Entwicklung für das Vergrösserungs-Verhältnis

$$\left.\begin{aligned} p - q = {} & 443{,}852\,122 \frac{q}{100} \\ & - 3952{,}649\,780 \left(\frac{q}{100}\right)^2 \quad [3.484\,6769{\cdot}820] \\ & + 1002{,}642\,506 \left(\frac{q}{100}\right)^3 \quad [3.001\,1461{\cdot}121] \\ & + 4119{,}589\,282 \left(\frac{q}{100}\right)^4 \quad [3.614\,8539{\cdot}196] \\ & - 431{,}181\,623 \left(\frac{q}{100}\right)^5 \quad [2.634\,661] \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Die Anwendung dieser Reihe auf $q = -7°$ und $q = +7°$ giebt:

$u = Q + q =$	$45° \; 40' \; 0''$	$59° \; 40' \; 0''$
	$q = -7°$	$q = +7°$
	$-31{,}069\,995''$	$+31{,}069\,965$
	$-14{,}957\,984$	$-14{,}957\,984$
	$-\;0{,}343\,906$	$+\;0{,}343\,906$
	$+\;0{,}098\,911$	$+\;0{,}098\,911$
	$+\;0{,}000\,725$	$-\;0{,}000\,725$
$p - q =$	$-46{,}272\,219$	$+16{,}554\,073$
$p =$	$-7° \; 0' \; 46{,}272\,219''$,	$+\;7° \; 0' \; 16{,}554\,073''$
hiezu $P =$	$52° \; 42' \; 2{,}53251''$	$52° \; 42' \; 2{,}53251''$
$\varphi = P + p =$	$45° \; 41' \; 16{,}26029''$	$59° \; 42' \; 19{,}08658''$

Diese Werte liegen bereits jenseits der Grenzen der Gauss schen Tafel, von der wir einen an den Grenzen etwas erweiterten Auszug auf Seite [60]—[61] des Anhangs gegeben haben.

Da das letzte Rechnungsglied immer noch 0,0007″ ausmacht, und die Konvergenz nicht sehr stark ist, kann man schliessen, dass für die Genauigkeit von 0,00001″, welche Gauss seiner Tafel gegeben hat, die Werte $q = -7°$ und $q = +7°$ als äusserste Grenzen zu betrachten sind.

§ 97. Reihen-Entwicklung für das Vergrösserungs-Verhältnis.

Das Vergrösserungs-Verhältnis ist nach (10) § 93. S. 487:

$$m = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} V \tag{1}$$

In der Normalbreite $\varphi = P$ (und $u = Q$) ist dieses Verhältnis $m = 1$; und wenn, wie bisher, irgend eine Breite auf der Kugel $u = Q + q$ gesetzt wird, so wird für irgend eine solche Breite sich das Verhältnis m als Funktion von q darstellen lassen, oder die Reihe für $\log m$ habe zunächst diese Form:

$$\log m = \frac{d \log m}{d q}\Big] q + \frac{d^2 \log m}{d q^2}\Big] \frac{q^2}{2} + \frac{d^3 \log m}{d q^3}\Big] \frac{q^3}{6} + \ldots \tag{2}$$

Da aber die beiden ersten Ableitungen von $\log m$ gleich Null gesetzt wurden (4) und (5) § 94. S. 488), so zieht sich (2) zusammen auf:

$$\log m = \frac{d^3 \log m}{d q^3}\Big] \frac{q^3}{6} + q^4 \ldots \tag{3}$$

Hiezu haben wir von (10) § 94. S. 489 die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2 \log m}{d u^2} = \frac{-\alpha^2 + V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u}{\alpha^2 \cos^2 u} = \frac{Z}{N} \tag{4}$$

also weiter:

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = \frac{1}{N^2}\left(\frac{d Z}{d u} N - \frac{d N}{d u} Z\right) \tag{5}$$

Wenn man nachher wieder die Substitutionen für die Normalbreiten Q und P nach (14) § 96. S. 495 zu machen hat, wird man finden, dass der Zähler Z in (4) verschwindet, es bleibt also nur von (5):

$$\left.\frac{d^3 \log m}{d u^3}\right] = \left.\frac{1}{N}\frac{d Z}{d u}\right] \tag{6}$$

Da auch α^2 im Zähler Z von (4) konstant ist, handelt es sich also nur noch um:

$$\frac{d Z}{d u} = \frac{d}{d u}(V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u)$$

$$= \left(2 V \frac{d V}{d \varphi} \cos^2 \varphi - 2 V^2 \cos \varphi \sin \varphi\right)\frac{d \varphi}{d u} + \alpha \cos \varphi \frac{d \varphi}{d u} \sin u + \alpha \sin \varphi \cos u \tag{7}$$

Dabei ist nach (8) und (7) § 94. S. 489 zu beachten mit $\operatorname{tang} \varphi = t$:

$$\frac{d V}{d \varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t \quad \text{und} \quad \frac{d \varphi}{d u} = \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u}$$

Dieses in (7) eingesetzt giebt:

$$(-2 \eta^2 t \cos^2 \varphi - 2 V^2 \cos \varphi \sin \varphi)\frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} + \alpha \cos \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \sin u + \alpha \sin \varphi \cos u$$

Nun muss man wieder die Substitutionen (14) § 96. S. 495 machen, wodurch $\frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} = V$ wird, und die vorstehende Gleichung giebt dadurch mit $t = \operatorname{tang} \varphi$:

$$\left.\frac{d Z}{d u}\right] = -2 V \eta^2 t \cos^2 \varphi - 2 V^3 \cos \varphi \sin \varphi + \alpha \cos \varphi V + \alpha \sin \varphi \cos u$$

Wenn man weiter den Nenner $N = \alpha^2 \cos^2 u$ aus (4) zusetzt und wieder von (14) § 96. S. 495 berücksichtigt, dass $\frac{\cos^2 \varphi}{N} = \frac{1}{V^2}$, so wird man vollends erhalten:

$$\left.\frac{d^3 \log m}{d u^3}\right] = -\frac{2 \eta^2}{V} t - 2 V t + \frac{1}{V} t + \frac{1}{V} t$$

und mit $V^2 = 1 + \eta^2$ zieht sich dieses zusammen, wobei nun $t = \operatorname{tang} P$ wird:

$$\left.\frac{d^3 \log m}{d u^3}\right] = \frac{-4 \eta^2}{V} t = -\frac{4 \eta^2}{V} \operatorname{tang} P \tag{8}$$

Die gesuchte Reihe für $\log m$ ist daher nach (3):

$$\log m = -\frac{2 \eta^2}{3 V} t q^3 + q^4 \ldots \qquad \text{mit } t = \operatorname{tang} P \tag{9}$$

Wenn man hiebei stehen bleiben will, d. h. wenn man q^4 und p^4 vernachlässigen will, so kann man leicht auch $\log m$ in p^3 ausdrücken, denn da nach (19) § 96. S. 496 in erster Näherung $p = q V$ ist, kann man (9) auch so schreiben:

$$\log m = -\frac{2}{3}\frac{\eta^2}{V^4} t p^3 + \ldots \qquad \text{mit } t = \operatorname{tang} P \tag{10}$$

In (9) und (10) bedeutet *log* den natürlichen Logarithmus; will man also gewöhnliche Brigg sche Logarithmen haben, so muss man noch den Modulus μ zusetzen, und wenn man zugleich die Formeln für q oder p in Graden einrichten will, so muss man noch mit $\varrho^{\circ 3}$ dividieren; d. h. man erhält aus (9):

$$log\, m = -\frac{\mu}{\varrho^{\circ 3}} \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t\, q^3 \qquad \text{mit } t = tang\, P \tag{11}$$

Die Ausrechnung mit den Konstanten von (25)—(28) § 94. S. 491 giebt für Einheiten der siebenten Logarithmenstelle:

$$log\, m = -0{\cdot}049\,796\,165\, q^3 + \ldots \tag{12}$$

Auf gleiche Weise erhält man von (10):

$$log\, m = -0{\cdot}049\,612\,434\, p^3 + \ldots \tag{13}$$

In Art. 7. und Art. 9. der „Untersuchungen über Gegenst. d. höheren Geodäsie" hat Gauss diese Entwicklungen bis zur sechsten Potenz fortgesetzt, wodurch erhalten wurde:

$$\left.\begin{aligned} log\, m = -49796{\cdot}16394 \left(\frac{q}{100}\right)^3 - 16150{\cdot}3076 \left(\frac{q}{100}\right)^4 - 23973{\cdot}954 \left(\frac{q}{100}\right)^5 \\ - 125\,671{\cdot}0 \left(\frac{q}{100}\right)^6 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Dabei ist q in Einheiten von 1° und $log\, m$ in Einheiten der 7ten Dezimale des Logarithmus gezählt. Unsere Formel (12) ist also nur die erste Näherung der Gaussschen Formel (12a), nach welcher die Gaussschen Werte $log\, m$ unserer Anhangstafel Seite [60]—[61] berechnet sind. Beispielshalber nehmen wir für $q = -4°$ oder $u = 46° 40'$ und für $q = +4°$ oder $u = 58° 40'$ aus jener Tafel $log\, m = +10{\cdot}559$ und $log\, m = -10{\cdot}990$, während die Näherungsformel (12) in beiden Fällen nur giebt $log\, m = +10{\cdot}7$ und $= -10{\cdot}7$.

Bisher haben wir immer nur $log\, m$ behandelt, eine Formel für m selbst erhalten wir, da in (9) und (10) natürliche Logarithmen gelten, sehr einfach hieraus:

$$m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t\, q^3 + \ldots \quad \text{oder} \quad m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t\, p^3 \tag{15}$$

und umgekehrt (wobei immer $t = tang\, P$ bedeutet):

$$\frac{1}{m} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t\, q^3 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{m} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t\, p^3 \tag{16}$$

Reduktion von Entfernungen.

Der Wert m gilt nur für unendlich kleine Entfernungen, d. h. wenn dS eine kleine Entfernung auf dem Ellipsoid und ds die entsprechende Entfernung auf der Kugel bedeutet, so ist

$$m = \frac{ds}{dS} \quad \text{oder} \quad dS = \frac{1}{m} ds$$

und um auch endliche Entfernungen s und S vergleichen zu können, hat man diese Gleichung zu integrieren, ähnlich wie schon in § 50. S. 282 und in § 85. S. 455 geschehen ist.

Zu diesem Zwecke zählen wir die sphärische Breiten-Differenzen q von einem Werte q_1 an, welcher dem Anfang des ganzen Bogens s entspricht und die Länge des Bogens s selbst zählen wir ebenfalls vom Anfang an mit $+x$ in dem Azimut β_1.

Da der Kugelhalbmesser $= A$ ist, haben wir die Breiten-Differenz $q - q_1$ als eine Reihe nach Potenzen von x mit dem Ausgangs-Azimut β_1, d. h. wir können dazu die früheren allgemeinen Reihenentwicklungen von § 64. benützen, d. h. wir haben von (27) S. 359 mit $u = \frac{x}{A} \cos \beta_1$ und mit $v = \frac{x}{A} \sin \beta_1$:

Breitendifferenz $$q - q_1 = \frac{x}{A} \cos \beta_1 - \frac{x^2}{2\,A^2} \sin^2 \beta_1 \operatorname{tang} (Q + q_0)$$

Es genügt für das Folgende zu wissen, dass dieses eine quadratische Funktion von x ist, und dass damit auch $\frac{1}{m}$ nach (16) sich in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lassen wird, ganz ebenso wie bei einer früheren ähnlichen Betrachtung von § 85. sich der Ausdruck $\frac{1}{m}$ als eine Potenzreihe $\alpha + \beta l + \gamma l^2 + \ldots$ auf S. 456. oben darstellen liess.

Das genügt auch, um die Beziehung zwischen einer auf dem Ellipsoid liegenden geodätischen Linie S und ihrem Abbilde s auf der Kugel durch eine Beziehung darzustellen, welche der früheren (31) § 85. S. 457 oder auch (16) § 50. S. 282 entsprechend, in erster Näherung so lautet:

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) \tag{17}$$

wobei m_1 das Vergrösserungs-Verhältnis am Anfang, m_0 in der Mitte und m_2 am Ende bedeutet.

Wenn die verschiedenen m nicht sehr verschieden sind, so kann man noch mehr genähert rechnen, und z. B. logarithmisch kurz so nehmen:

$$\log s - \log S = \frac{\log m_1 + \log m_2}{2} \tag{18}$$

Das ist auch dasselbe, wie wenn man schreibt:

$$\frac{s}{S} = \sqrt{m_1\, m_2} \tag{19}$$

Dazu sei auch nochmals bemerkt, dass S die geodätische Linie auf dem Ellipsoid und s die entsprechende Linie auf der konformen Kugel vom Halbmesser A ist.

§ 98. Azimut-Reduktion.

Wenn zwei Punkte des Ellipsoids auf die Kugel konform abgebildet sind, so kann man auch die Verbindungslinien beider Punkte in Betracht ziehen, und zwar denken wir uns auf dem Ellipsoid beide Punkte durch eine geodätische Linie und auf der Kugel durch einen Grosskreisbogen verbunden.

Man darf aber nicht annehmen, dass nun der Grosskreisbogen schlechthin die Abbildung der geodätischen Linie sei; das ist ebensowenig der Fall, als dass bei der ebenen konformen Abbildung von § 50. die Gerade in der Ebene als Abbildung des Grosskreisbogens genommen werden dürfte, und wir werden eine ähnliche Betrachtung wie bei Fig. 5. S. 281 oder Fig. 2. S. 453 nun auch für die Kugelabbildung anzustellen haben.