Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 100. Hilfstafeln und Zahlenbeispiele

§. 100. Hilfstafeln und Zahlenbeispiele.

Gauss hat eine ausführliche Tafel zur Reduktion der sphärischen Breiten auf sphäroidische Breiten nebst $log\, m$ und k berechnet und in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie", erste Abhandlung S. 37—45 mitgeteilt. (Carl Friedrich Gauss' Werke, IV. Band, Göttingen 1873, S. 293—300.)

Auf Seite [60]—[61] unseres Anhangs haben wir einen Auszug der Gauss schen Tafel abgedruckt, mit dem 10fachen Intervall $\Delta u = 10'$, ($\Delta u = 1'$ bei Gauss). Ausserdem haben wir auf Seite [59] eine Hilfstafel zur Reduktion der geographischen Längen mit der Konstanten α beigegeben.

Unsere Haupttafel Seite [60]—[61] verlangt Interpolation mit zweiten Differenzen, wozu § 30. S. 183 Anleitung giebt. Damit bekommt man nahezu dieselbe Genauigkeit, wie mit der Originaltafel selbst, so dass für einzelne Fälle der Auszug als Ersatz des nicht immer zugänglichen Originals dienen kann. Auch giebt der Auszug eine bequeme Übersicht der Gesamt-Verhältnisse; man sieht z. B., dass $log\, m$ nicht über 0·1 geht auf der ganzen breiten Zone von 51° 20′ bis 54° 0′. Ähnlich verhält es sich mit den Azimut-Korrektionen, welche von der Tafelgrösse k abhängen; man kann also auf dieser ganzen nahe 3° oder rund 300 000 Meter breiten Zone eine Triangulierung sphärisch berechnen, ohne eine andere Nebenarbeit als das Verwandeln der Breiten φ und u durch Aufschlagen in der Tafel.

Wenn die neuen Berechnungen der trigonometrischen Abteilung der Preussischen Landesaufnahme, die wir schon in § 94. bei (24)—(25) S. 490 erwähnt haben, veröffentlicht sein werden, so werden diese an Stelle der alten Gauss schen Originaltafeln zu benützen sein.

Ausser der Gauss schen Tafel ist in neuerer Zeit noch eine zweite solche Tafel mit südlicherer Normalbreite, nämlich $Q = 46° \; 36'$, berechnet worden von Marek und Horsky. Dieselbe, welche, wie die Gauss sche Tafel, die Bessel schen Erddimensionen zu Grunde legt, ist mitgeteilt in dem Werke von Marek: „Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters, Budapest 1875", S. 252 262. Einiges weitere hierüber haben wir früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1877", S. 40—46 mitgeteilt, und einen Auszug der Marek schen Tafel gab unsere frühere dritte Auflage, Karlsruhe 1878, S. 403—404.

Als Anwendung der Gauss schen Theorie und der zugehörigen Hilfstafeln wollen wir die Berechnung unseres kleinen sphäroidischen Normal-Beispiels (1) § 73. S. 391 nehmen in dieser Form:

$$\text{Gegeben: } \varphi_1 = 49° \; 30' \; 0'' \qquad \varphi_2 = 50° \; 30' \; 0'' \tag{1}$$

$$l = 1° \; 0' \; 0'' \tag{2}$$

Gesucht: α_1, α_2 und s.

Das erste ist, die Breiten φ_1 und φ_2 auf die Kugel zu übertragen, d. h. die entsprechenden u_1 und u_2 aus der Tafel zu entnehmen. Von Seite [60] unseres Anhangs haben wir:

u	φ	Differenzen	
49° 20′ 0″	49° 21′ 44,31358″		
49° 30′ 0″	49° 31′ 45,38838″	+ 10′ 1,07480″	— 0,01736″
10′ 0″		= 601,07480″	
= 600″			

$\varphi = 49° \; 30'$ hat gegen die Nachbarwerte die Differenzen:

$$\left.\begin{array}{ll} & -8' \; 15{,}68642'' = -495{,}68642'' \\ \text{und} & +1' \; 45{,}38838'' = +105{,}38838'' \end{array}\right\} 601{,}07480''$$

Die Interpolation mit Rücksicht auf zweite Differenzen gab:

$$u = 49^\circ\ 28'\ 14{,}79882''$$

Die Rechnung nach der Gauss schen Originaltafel gab auf 0,00001″ genau dasselbe, nämlich die Zusammenstellung für alle Werte, die uns hier interessieren:

Ellipsoid, φ	Kugel, u	$log\, m$	k	
49° 30′ 0″	$u_1 = 49^\circ\ 28'\ 14{,}79881''$	1·609	2,049″	(3)
50° 0′ 0″	49° 58′ 11,67462″	0·969	1,462″	
50° 30′ 0″	$u_2 = 50^\circ\ 28'\ 8{,}70541''$	0·525	0,973″	

Aus den drei Werten $log\, m$ bilden wir einen Mittelwert nach dem Gesetze der Gleichung (17) § 97. S. 500, welcher in der dort angegebenen Weise auch für $log\, m$ gilt, und in unserem Falle giebt:

$$log\, m = \frac{1{\cdot}609 + 4 \times 0{\cdot}969 + 0{\cdot}525}{6} = 1{\cdot}017 \tag{4}$$

Der Längenunterschied $l = 1^\circ\ 0'\ 0''$ wird auf die Kugel reduziert durch Multiplikation mit der Konstante α, bzw. durch Benützung der Hilfstafel Seite [59] des Anhangs, mit dem Ergebnis:

$$\lambda = \alpha\, l = 1^\circ\ 0'\ 1{,}630505'' \tag{5}$$

Nun macht man mit u_1 und u_2 von (3) nebst λ von (5) eine sphärische Polar-Dreiecksberechnung nach (4) und (5) § 60. S. 339, wodurch man erhält:

Sphärische Azimute $\beta_1 = 32^\circ\ 25'\ 21{,}4923''$ $\quad \beta_2 = 33^\circ\ 11'\ 19{,}4197''$ (6)

und $\quad log\, sin \frac{\sigma}{2} = 8{\cdot}015\ 5452{\cdot}409\ ,\quad \frac{\sigma}{2} = 0^\circ\ 35'\ 37{,}85453''$

$$s' = A \frac{\sigma}{\varrho} \text{ giebt } log\, s' = 5.121\ 6104{\cdot}130$$

biezu nach (4) $\quad -\, log\, m = \quad -1{\cdot}017$

$$log\, s = 5.121\ 6103{\cdot}113\ ,\quad s = 132\,315{,}375^{\mathrm{m}} \tag{7}$$

Es folgen noch die Azimut-Reduktionen nach den Formeln (28) und (29) §. 98. S. 505. Man hat hiezu die schon bei (3) angegebenen k und die abgerundeten Azimute:

$$k_1 = 2{,}049'' \qquad k_2 = 0{,}973''$$
$$\alpha_1 = 32^\circ\ 25' \qquad \alpha_2 = 33^\circ\ 11'$$

Die Ausrechnung nach den Formeln (28) und (29) S. 505 giebt:

$$\psi_1 = \alpha_1 - \beta_1 = +\,0{,}0189'' \qquad = \psi_2 = \alpha_2 - \beta_2 = -\,0{,}0149''$$

Diese Reduktionen zu β_1 und β_2 in (6) hinzugefügt, geben die sphäroidischen Azimute:

$$\alpha_1 = 32^\circ\ 25'\ 21{,}5112'' \qquad \alpha_2 = 33^\circ\ 11'\ 19{,}4048'' \tag{8}$$

In diesen (7) und (8) besteht die Auflösung der gestellten Aufgabe, und diese (7) und (8) stimmen auch hinreichend überein mit den entsprechenden Zahlenwerten von § 73. (1) S. 391.

§ 101. Doppel-Projektion der Preussischen Landesaufnahme.

Die Gaussische konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel ist zu einer wichtigen, praktischen Anwendung gebracht worden durch General Schreiber bei der trigonometrischen Abteilung der Preussischen Landesaufnahme.