Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 103. Die reduzierte Breite

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Dieses grosse in sich widerspruchsfrei geodätisch ausgeglichene Werk, welches für alle praktischen Vermessungszwecke in ganz Preussen einheitliche widerspruchsfreie Coordinaten und Abrisse liefert, ist ein Werk, welches seinesgleichen kaum in einem anderen Staate haben wird, welches jeden Landmesser mit Freude erfüllen muss, der auf irgend welchem Teile desselben und in irgend einer der Formen, in welchen die Ergebnisse desselben noch verwertet werden können, mitzuwirken berufen sein wird.

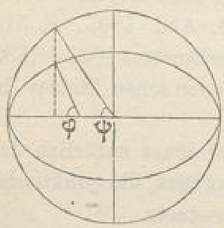
Kapitel IX.

Polar-Dreieck mit reduzierten Breiten.

§ 103. Die reduzierte Breite.

Eine neue Behandlung der geodätischen Linie bekommen wir durch Einführung eines sphärischen Hilfsdreiecks mit „reduzierten Breiten". Es ist das eine Theorie, welche bei Berechnung sehr langer geodätischer Linien eine wichtige Rolle spielt.

Fig. 1.



Wir betrachten mit Fig. 1. einen Hilfswinkel, der „reduzierte Breite" heisst, und den wir im Folgenden allgemein mit ψ bezeichnen wollen, während die geographische Breite wie immer mit φ bezeichnet werden soll.

Man kann die gewöhnliche Ellipsen-Gleichung zur Einführung von ψ benützen, denn wenn für die Ellipse die Gleichung besteht:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

so kann man unbedingt setzen:

$$\frac{x}{a} = \cos\psi \quad , \quad \frac{y}{b} = \sin\psi \tag{2}$$

Dabei ist nach (16) § 32. S. 196:

$$\frac{x}{a} = \frac{\cos\varphi}{W} \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{y}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin\varphi}{W}\sqrt{1-e^2} \tag{3}$$

also:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{W} \quad , \quad \sin\psi = \frac{\sin\varphi}{W}\sqrt{1-e^2} \tag{4}$$

wobei gesetzt ist:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} \tag{5}$$

Die geometrische Bedeutung des so eingeführten Winkels ψ ist durch Fig. 1. veranschaulicht, man wird auf die Hilfsbreite ψ auch geführt durch eine bekannte Ellipsen-Konstruktion, bei welcher zwei konzentrische Kreise mit den Halbmessern a und b benützt werden.

Eine zweite Veranlassung zur Einführung der reduzierten Breite haben wir in dem Satze von der geodätischen Linie, den wir in (11) § 69. S. 378 gefunden haben, nämlich:

$$p \sin\alpha = k \tag{6}$$

wo p der Parallelkreis-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids ist, d. h. derselbe Wert, der in (1) und (2) mit x bezeichnet wurde, man hat also:

$$p = x = \frac{a\cos\varphi}{W} = a\cos\psi, \text{ d. h. } \cos\psi = \frac{\cos\varphi}{W} \tag{7}$$

Der dadurch bestimmte Wert ψ ist derselbe, den wir schon in (4) kennen gelernt und reduzierte Breite genannt haben. Damit giebt die Gleichung (6):

$$a \cos\psi \sin\alpha = a \cos\psi' \sin\alpha' = k \qquad (8)$$

Die letzte Gleichung ist eine Anwendung des Satzes (6) auf zwei zusammengehörige Wertpaare ψ, α und ψ', α'; und indem man dabei den konstanten Faktor a und das allgemeine Zeichen k fortlässt, hat man aus (6) oder (8):

$$\cos\psi \sin\alpha = \cos\psi' \sin\alpha' \qquad (9)$$

Dieser Gleichung (9) entspricht ein sphärisches Dreieck, das wir in Fig. 2. des nächsten § 104. näher betrachten wollen; und damit erlangt die reduzierte Breite ψ, welche nun als Repräsentant des sphäroidischen Parallelkreis-Halbmessers $p = x$ in Gleichung (7) erscheint, erhöhte Bedeutung.

Wir haben also durch die Gleichung (7) ausführlicher:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{W} \qquad (\text{wo } W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}) \qquad (10)$$

oder auch mit Einführung von $V = W : \sqrt{1 - e^2}$ wie immer nach (1) und (2), S. 202 bis 203:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}} \qquad \left(\text{wo } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi}\right) \qquad (11)$$

Daraus findet man durch geometrische Umformung:

$$\sin\psi = \frac{1}{V}\sin\varphi \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2\psi}} \qquad (12)$$

$$\tang\psi = \tang\varphi \sqrt{1 - e^2}, \quad \text{oder} \quad \tang\varphi = \tang\psi \sqrt{1 + e'^2} \qquad (13)$$

Wir brauchen auch noch die Differentialbeziehung zwischen φ und ψ, welche sich am einfachsten aus (13) ergiebt, nämlich:

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = \frac{d\varphi \sqrt{1-e^2}}{\cos^2\varphi}$$

also wegen (11):

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = V^2 \sqrt{1 - e^2} \qquad (14)$$

Aus (11) findet man auch: $V^2 = \dfrac{1 + e'^2}{1 + e'^2 \sin^2\psi}$

und

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\psi}} \qquad (15)$$

Die geometrische Bedeutung von V^2 ist, nach (25) S. 197, das Haupt-Krümmungsverhältnis, d. h. das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser N und M in einem Punkte des Ellipsoids mit der Breite φ; und die Formel (15), welche nun V^2 bzw. V auch als Funktion von ψ giebt, ist für spätere Anwendung wichtig.

Numerische Berechnung von $\varphi - \psi$.

Um zu gegebenem φ das zugehörige ψ zu berechnen oder umgekehrt, kann man zuerst die Gleichung (13) anwenden:

$$\tang\psi = \tang\varphi \sqrt{1 - e^2} \qquad (\log \sqrt{1-e^2} = 9.998\,5458 \cdot 202) \qquad (16)$$

Wenn man aber besondere Zahlenschärfe wünscht, so wird es besser sein, auf die Differenz $\varphi - \psi$ geradezu auszugehen, und hiezu hat man nach (12) und (11):

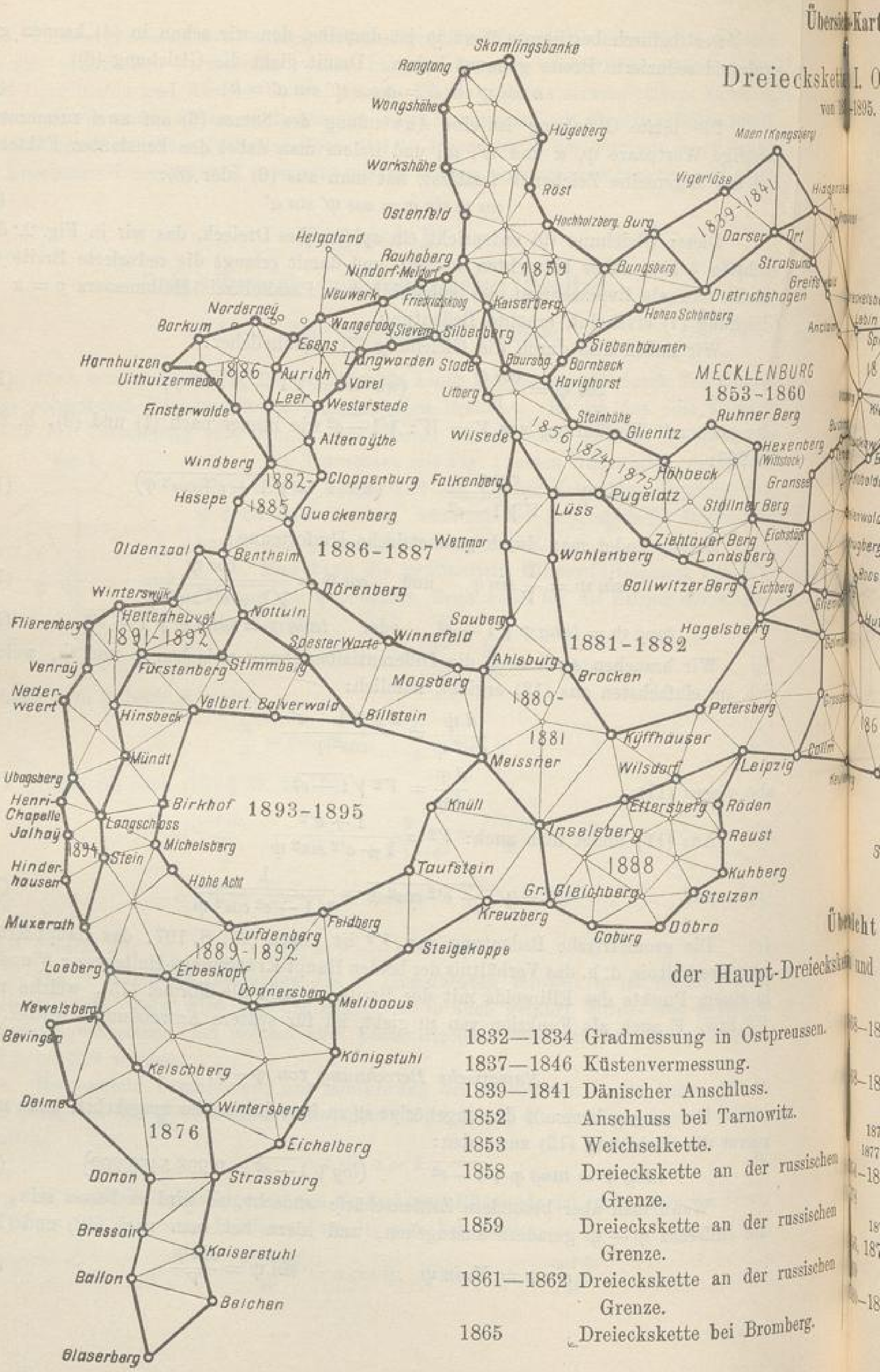
$$\sin\varphi = V \sin\psi \qquad \sin\psi = \frac{\sin\varphi}{V} \qquad (17)$$

Preussische Lan[ds-Tr...]

Übersi[cht-]Kart[e]

Dreieckske[tten] I. O[rdnung]

von 18[..]-1895.



Üb[ers]icht

der Haupt-Dreiecks[ketten] und

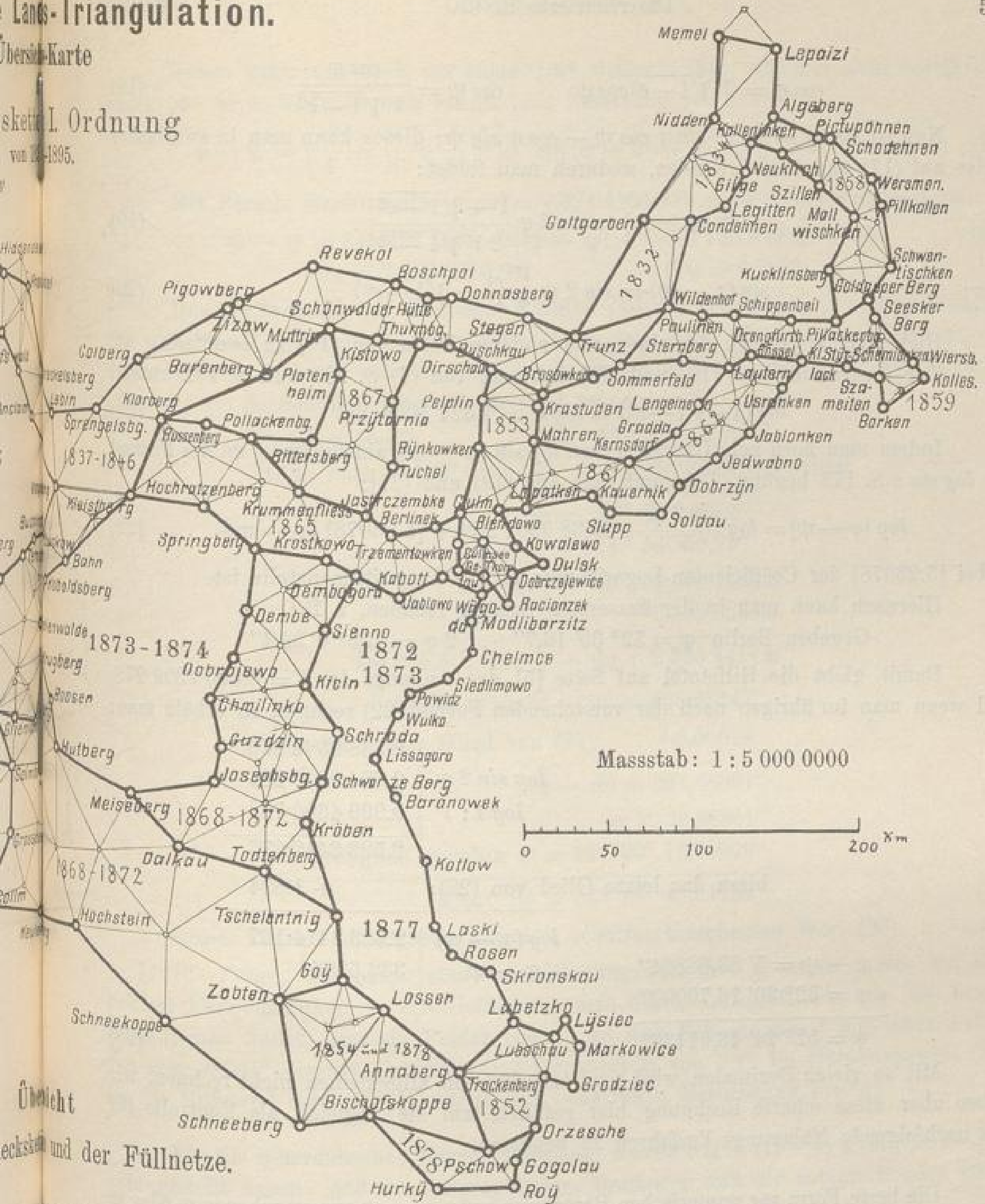
1832—1834	Gradmessung in Ostpreussen.
1837—1846	Küstenvermessung.
1839—1841	Dänischer Anschluss.
1852	Anschluss bei Tarnowitz.
1853	Weichselkette.
1858	Dreieckskette an der russischen Grenze.
1859	Dreieckskette an der russischen Grenze.
1861—1862	Dreieckskette an der russischen Grenze.
1865	Dreieckskette bei Bromberg.

…Land…-Triangulation.

Über…-Karte

…skett… I. Ordnung

von …-1895.



Über…cht

…ecks… und der Füllnetze.

…–1872 Märkisch - schlesische Dreieckskette.
…–1872 Schlesisch - posensche Dreieckskette.
1872–1873 Posensches Dreiecksnetz.
1877 Schlesisch-posensches Dreiecksnetz.
…–1878 Schlesische Dreieckskette.
Österreichischer Anschluss.
1873–1874 Märkisches Dreiecksnetz.
…, 1874 und 1875 Elbkette.
Schleswig-holst. Dreieckskette.
…–1881 Hannoversch-sächsische Dreieckskette.

1881—1882 Sächsisches Dreiecksnetz.
1882—1885 Hannoversche Dreieckskette.
1886—1887 Wesernetz.
1888 Thüringisches Dreiecksnetz.
1889—1892 Rheinisch - hessische Dreieckskette.
1893—1894 Niederrheinisches Dreiecksnetz.
1886, 1889—1892 Niederländischer Anschluss.
1894 Belgischer Anschluss.
1895 Pfälzisches Dreiecksnetz.
1876 Elsass-lothringische Kette.

$$\cos\varphi = V\sqrt{1-e^2}\cos\psi \qquad \cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}} \tag{18}$$

Nun ist $\sin(\varphi-\psi) = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi$; dieses kann man in zweifacher Weise auf (17) und (18) anwenden, wodurch man findet:

$$\sin(\varphi-\psi) = \sin 2\varphi\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2\,V\sqrt{1-e^2}} \tag{19}$$

oder:

$$\sin(\varphi-\psi) = \sin 2\psi\,\frac{V}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) \tag{20}$$

Hiebei ist V je nach der einen oder anderen Form von (15) zu benützen.

Zur Anwendung von (19) und (20) hat man von (7) S. 180 und S. 192 unten:

$$\log\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) = \log\alpha = 7.524\,1069{\cdot}093 \tag{21}$$

Indem man noch zum Übergang von $\log\sin(\varphi-\psi)$ auf $\log(\varphi-\psi)$ die Formel für $\log\sin x$ S. 173 benützt, bekommt man aus (19) und (21):

$$\log(\varphi-\psi) = \log\frac{\sin 2\varphi}{V} + 2.538\,9562{\cdot}266 + [5.23078]\,(\varphi-\psi)^2 \tag{22}$$

wobei [5.23078] der Coëfficienten-Logarithmus für 7te Logarithmenstelle ist.

Hiernach kann man in der äussersten Schärfe rechnen, z. B.:

Gegeben Berlin $\varphi = 52°\,30'\,16{,}7''$, $2\varphi = 105°\,0'\,33{,}4''$

Damit giebt die Hilfstafel auf Seite [5] des Anhangs $\log V = 0.000\,5399{\cdot}278$, und wenn man im übrigen nach der vorstehenden Formel (22) rechnet, so erhält man:

	2.538 9562·266
$\log\sin 2\varphi$	9.984 9249·285
$\log 1:V$	9.999 4600·722
	2.523 3412·273
hiezu das letzte Glied von (22):	+ 1.894
$\log(\varphi-\psi)$	2.523 3414·167
$\varphi-\psi=$	333,68864

$$\varphi-\psi = 5'\,33{,}68864''$$
$$\varphi = 52°\,30'\,16{,}70000''$$
$$\psi = 52°\,24'\,43{,}01136'' \tag{23}$$

Mit so vielen Dezimalen wird man natürlich im allgemeinen nicht rechnen, wir haben aber diese scharfe Rechnung hier geführt, um sie zugleich als Kontrolle für das nachfolgende Näherungs-Verfahren zu benützen.

Die beste Form zur numerischen Berechnung von $\varphi-\psi$ aus gegebenen φ oder ψ erhält man durch eine Reihen-Entwicklung nach dem Grundsatze des Mittelarguments (§ 29. S. 178—179). Nach (13) ist:

$$\tan\psi = \sqrt{1-e^2}\,\tan\varphi = \left(1-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{8}\right)\tan\varphi$$

andererseits $\tan\varphi - \tan\psi = \dfrac{\varphi-\psi}{\cos^2\mu} + (\varphi-\psi)^3\ldots$ mit $\dfrac{\varphi-\psi}{2} = \mu$

damit wird: $\varphi-\psi = \left(\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e^4}{8}\right)\cos^2\mu\,\tan\varphi$, $\varphi = \mu + \dfrac{e^2}{4}\sin\mu\cos\mu$

woraus weiter: $$\varphi-\psi = \left(\frac{e^2}{4}+\frac{e^4}{8}\right)\sin(\varphi+\psi)$$

Dieses kann man noch um einen Grad weiter treiben, was hier nicht ausführlich angegeben wird, wodurch man erhält (mit Zusetzung von ϱ''):

$$\varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5}{64}e^6\right)\varrho'' \sin(\varphi - \psi) + \frac{1}{384}e^6\varrho'' \sin^3(\varphi + \psi) \qquad (24)$$

Mit Bessels Excentricität $\log e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$ giebt dieses ausgerechnet:

$$\varphi - \psi = 345{,}325\,3808 \sin(\varphi + \psi) + 0{,}000\,160 \sin^3(\varphi + \psi) \qquad (25)$$

$$(\log = 2.538\,2285{\cdot}0) \qquad\qquad (\log = 6.2033)$$

Das zweite Glied mit höchstens 0,00016″ ist für gewöhnlich zu vernachlässigen. Um die Formel (25) bequem anzuwenden, muss man einen Näherungswert von $\varphi - \psi$ vorher haben, und ein solcher wird durch unsere Hilfstafel Seite [58] des Anhangs geliefert; die Anwendung mag ein Beispiel zeigen:

Gegeben Berlin $\varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}7''$

Hiezu nach S. [58]: $\varphi - \psi = 5'\ 33{,}65''$ genähert

$\psi = 52^\circ\ 24'\ 43{,}05''$

$\varphi + \psi = 104^\circ\ 54'\ 59{,}75''$

$\log \sin(\varphi + \psi)$	9.985 1126.8
$\log 345{,}3\ldots$	2.538 2285.0
$\log 345{,}3\ldots \sin(\varphi + \psi)$	2.523 3411.8

$345{,}3\ldots \sin(\varphi + \psi) = 333{,}68847''$

Hiezu das zweite Glied von (25): $+0{,}00014$

$(\varphi - \psi) = 333{,}68861''$

$= 5'\ 33{,}68861''$

Ursprünglich gegeben $\varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}70000''$

Also: $\psi = 52^\circ\ 24'\ 43{,}01139''$ (26)

Dieses stimmt hinreichend mit dem schärfer berechneten Wert (23).

Die Frage, wie genau man den Näherungswert $\varphi + \psi$ haben muss, um eine gewisse Endgenauigkeit zu erreichen, kann man durch Differentiieren von (25) beantworten; man findet, dass ein Fehler von 1″ an dem Näherungswert nur einen Fehler von etwa 0,001″ erzeugt, weshalb eine Genauigkeit von 0,1″ im Näherungswert (wie sie die Hilfstafel Seite [58] gewährt) zur endgiltigen Berechnung genügt.

Für die sphäroidischen Normal-Beispiele, welche wir in (1)—(5) § 73. S. 391—392 vorangestellt haben, sind die geographischen Breiten φ und die entsprechenden reduzierten Breiten ψ die folgenden:

$\varphi = 45^\circ\ 0'\ 0''$	$\psi = 44^\circ\ 54'\ 14{,}67493''$		Mecklenburg	
$49^\circ\ 30'\ 0''$	$49^\circ\ 24'\ 18{,}83709''$			
$50^\circ\ 0'\ 0''$	$49^\circ\ 54'\ 19{,}82230''$		$\varphi = 53^\circ\ 0'$	$\psi = 52^\circ\ 54'\ 27{,}89895''$
$50^\circ\ 30'\ 0''$	$50^\circ\ 24'\ 20{,}91117''$		$54^\circ\ 30'$	$54^\circ\ 24'\ 33{,}31059''$
$55^\circ\ 0'\ 0''$	$54^\circ\ 54'\ 35{,}31462''$			

Tübingen	$\varphi = 48^\circ\ 31'\ 12{,}4000''$	$\psi = 48^\circ\ 25'\ 29{,}6082''$
Hornisgrinde	$\varphi = 48^\circ\ 36'\ 21{,}8966''$	$\psi = 48^\circ\ 30'\ 30{,}2280''$
Berlin	$\varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}7''$	$\psi = 52^\circ\ 24'\ 43{,}0014''$
Königsberg	$\varphi = 54^\circ\ 42'\ 50{,}6''$	$\psi = 54^\circ\ 37'\ 24{,}7564''$