Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 104. Das sphärische Hilfs-Dreieck mit reduzierten Breiten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

§ 104. Das sphärische Hilfsdreieck mit reduzierten Breiten.

Wir knüpfen an die im vorigen § 103. (9) S. 521 gefundene Gleichung an:

$$\cos\psi \sin\alpha = \cos\psi' \sin\alpha' \tag{1}$$

Dieser Gleichung entspricht die nachstehende Fig. 2.

In nachstehender Fig. 1. sind P und P' zwei Punkte auf dem Ellipsoid, s die verbindende geodätische Linie mit den Azimuten α und α'. Die beiden Punkte P und P' haben die geographischen Breiten φ und φ' und den Längen-Unterschied l.

Fig. 1. Ellipsoid.

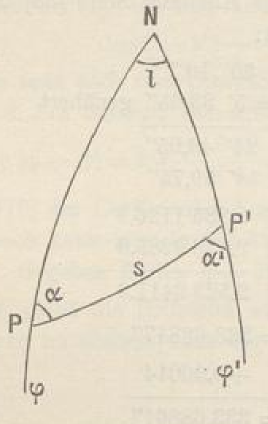
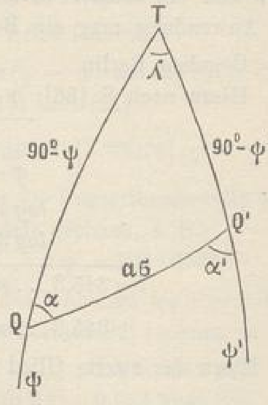


Fig. 2. Kugel.



In Fig. 2. ist ein entsprechendes sphärisches Dreieck $T\,Q\,Q'$ gezeichnet, dessen Bogen $Q\,Q'$ dieselben Azimute α und α' hat wie die geodätische Linie $P\,P'$. Der Bogen $Q\,Q'$ ist mit $a\,\sigma$ bezeichnet, indem der Kugelhalbmesser $= a$ (Äquatorhalbmesser des Ellipsoids) und der Centriwinkel $= \sigma$ angenommen ist. Der Längenunterschied zwischen Q und Q' ist $= \lambda$, verschieden von l. Auch die sphärischen Breiten ψ und ψ' sind andere als die ellipsoidischen, es sind die zu φ und φ' gehörigen reduzierten Breiten, d. h. nach (13) § 103. S. 521 bestehen die Beziehungen:

$$\tan\psi = \tan\varphi\sqrt{1-e^2} \quad , \quad \tan\psi' = \tan\varphi'\sqrt{1-e^2} \tag{2}$$

Die Richtigkeit all dieser Beziehungen ist durch die sphärische Gleichung (1) bewiesen, und wir wissen nun, dass einem geodätischen Polardreieck $N\,P\,P'$ auf dem Ellipsoid immer ein sphärisches Dreieck $T\,Q\,Q'$ entspricht, mit gleichen Azimuten α, α' und mit reduzierten Breiten ψ, ψ', welche zu φ, φ' gehören. Dagegen sind die übrigen Stücke, die Entfernung beider Punkte und deren Längenunterschied, in beiden Dreiecken verschieden.

Es kommt nun darauf an, eine Beziehung herzustellen zwischen s und σ und eine Beziehung zwischen l und λ, denn da zwischen allen übrigen Stücken von Fig. 1. und Fig. 2. vermöge der Gleichungen (1) und (2) bereits Beziehungen bestehen, werden wir dann in allen Teilen von dem sphäroidischen Dreieck auf das sphärische Dreieck übergehen können und umgekehrt.

Wir haben nach (1), (2) S. 392 und (1), (2), S. 347 folgende Differential-Gleichungen, mit den Bezeichnungen unserer vorstehenden Fig. 1. und 2. (geographische Länge auf dem Ellipsoid $= l$, auf der Kugel $= \lambda$):

Ellipsoid	Kugel	
$ds\cos\alpha = M\,d\varphi$	$a\,d\sigma\cos\alpha = a\,d\psi$	(3)
$ds\sin\alpha = N\cos\varphi\,dl$	$a\,d\sigma\sin\alpha = a\cos\psi\,d\lambda$	(4)

Hieraus durch Division:

$$\frac{ds}{a\,ds} = \frac{M\,d\varphi}{a\,d\psi} \qquad \frac{dl}{d\lambda} = \frac{M}{N}\,\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\,\frac{d\varphi}{d\psi}$$

Hiebei ist nach (11) und (14) § 103. S. 521:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = V\sqrt{1-e^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = V^2\sqrt{1-e^2} \tag{5}$$

Nach § 32. S. 196–197 ist $\dfrac{M}{a} = \dfrac{1-e^2}{W^3} = \dfrac{1}{V^3\sqrt{1-e^2}}$ und $\dfrac{M}{N} = \dfrac{1}{V^2}$ womit die beiden Gleichungen (5) folgende einfache Gestalt annehmen:

$$ds = a\,d\sigma\,\frac{1}{V} \tag{6}$$

$$dl = d\lambda\,\frac{1}{V} \tag{7}$$

Die hier zweimal auftretende Grösse V ist die stets von uns benützte Funktion der Breite, welche entweder in φ oder in ψ ausgedrückt nach (15) § 103. S. 521 ist:

$$V = \sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{V} = \sqrt{1-e^2\cos^2\psi} \tag{8}$$

Die geometrische Bedeutung von V haben wir schon in (25) § 32. S. 197 angegeben, es ist nämlich V^2 das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser N und M.

§ 105. Integration der Differential-Gleichungen des Polar-Dreiecks.

Wir haben vom vorigen § 104. (6) und (8) (s. oben) die Differential-Gleichung:

$$ds = a\,d\sigma\sqrt{1-e^2\cos^2\psi'} \tag{1}$$

Diese Gleichung bezieht sich auf die untenstehenden Fig. 1. und Fig. 2., indem ds das Differential der geodätischen Linie s in Fig. 1. und $a\,d\sigma$ das Differential des sphärischen Bogens σ (auf den Halbmesser a bezogen) von Fig. 2. ist; auch ψ' ist sphärische Breite eines Punktes auf dem Bogen σ.

Um die Gleichung (1) nach σ integrieren zu können, muss man ψ' in σ ausdrücken, wozu die Formeln der sphärischen Trigonometrie dienen, welche wir schon früher in (20)–(22) § 60. S. 343 angegeben haben, nämlich mit Übertragung auf unsere neue Fig. 2.:

Fig. 1. Ellipsoid.

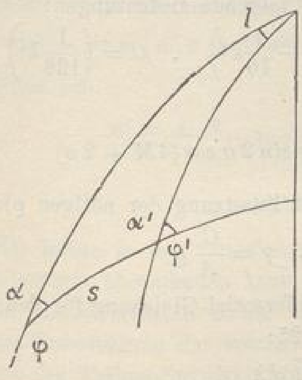


Fig. 2. Kugel.