Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 105. Integration der Differential-Gleichungen des Polar-Dreiecks

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Ellipsoid	Kugel	
$ds \cos \alpha = M d\varphi$	$a d\sigma \cos \alpha = a d\psi$	(3)
$ds \sin \alpha = N \cos \varphi \, dl$	$a d\sigma \sin \alpha = a \cos \psi \, d\lambda$	(4)

Hieraus durch Division:

$$\frac{ds}{a ds} = \frac{M d\varphi}{a d\psi} \qquad \frac{dl}{d\lambda} = \frac{M}{N} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{d\psi}$$

Hiebei ist nach (11) und (14) § 103. S. 521:

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \psi} = V\sqrt{1-e^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = V^2\sqrt{1-e^2} \tag{5}$$

Nach § 32. S. 196–197 ist $\frac{M}{a} = \frac{1-e^2}{W^3} = \frac{1}{V^3\sqrt{1-e^2}}$ und $\frac{M}{N} = \frac{1}{V^2}$ womit die beiden Gleichungen (5) folgende einfache Gestalt annehmen:

$$ds = a\, d\sigma \frac{1}{V} \tag{6}$$

$$dl = d\lambda \frac{1}{V} \tag{7}$$

Die hier zweimal auftretende Grösse V ist die stets von uns benützte Funktion der Breite, welche entweder in φ oder in ψ ausgedrückt nach (15) § 103. S. 521 ist:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{V} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} \tag{8}$$

Die geometrische Bedeutung von V haben wir schon in (25) § 32. S. 197 angegeben, es ist nämlich V^2 das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser N und M.

§ 105. Integration der Differential-Gleichungen des Polar-Dreiecks.

Wir haben vom vorigen § 104. (6) und (8) (s. oben) die Differential-Gleichung:

$$ds = a\, d\sigma \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi'} \tag{1}$$

Diese Gleichung bezieht sich auf die untenstehenden Fig. 1. und Fig. 2., indem ds das Differential der geodätischen Linie s in Fig. 1. und $a\, d\sigma$ das Differential des sphärischen Bogens σ (auf den Halbmesser a bezogen) von Fig. 2. ist; auch ψ' ist sphärische Breite eines Punktes auf dem Bogen σ.

Um die Gleichung (1) nach σ integrieren zu können, muss man ψ' in σ ausdrücken, wozu die Formeln der sphärischen Trigonometrie dienen, welche wir schon früher in (20)–(22) § 60. S. 343 angegeben haben, nämlich mit Übertragung auf unsere neue Fig. 2.:

Fig. 1. Ellipsoid.

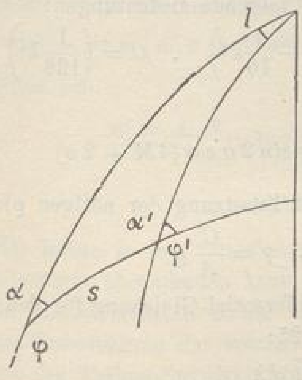
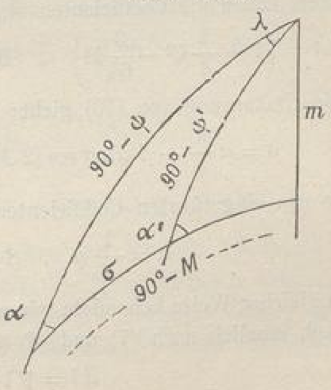


Fig. 2. Kugel.



$$\sin m = \cos \psi \sin \alpha \quad , \quad \tang M = \frac{\sin \psi}{\cos \psi \cos \alpha} \tag{2}$$

$$\cos m = \frac{\sin \psi}{\sin M} = \frac{\cos \psi \cos \alpha}{\cos M} \tag{3}$$

$$\sin \psi' = \cos m \sin (M + \sigma) \tag{4}$$

Nun setzen wir zur Schreib-Abkürzung im Folgenden:

$$M + \sigma = x \quad , \quad \text{wobei } M \text{ konstant, also } d\sigma = dx \tag{5}$$

also:
$$\sin^2 \psi' = \cos^2 m \sin^2 x \quad \text{und} \quad \cos^2 \psi' = 1 - \cos^2 m \sin^2 x \tag{6}$$

Dieses in (1) gesetzt giebt:

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m \sin^2 x \, d\sigma}$$

$$\frac{e^2}{1 - e^2} = e'^2 \quad , \quad \text{also } ds = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + e^2 \cos^2 m \sin^2 x} \, d\sigma \tag{7}$$

$$a \sqrt{1 - e^2} = b \quad , \quad e' \cos m = k \quad , \quad ds = b \sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} \, dx \tag{8}$$

Nun wird nach den gewöhnlichen Reihen S. 169 und S. 176 entwickelt:

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 x - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 x$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad , \quad \sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \tag{9}$$

Dieses zusammen giebt:

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right) + \left(-\frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{16} k^4\right) \cos 2x - \frac{k^4}{64} \cos 4x \tag{10}$$

Zur Integration hat man:

$$\int \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad , \quad \int \cos 4x = \sin 4x$$

$$\int_M^{M+\sigma} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \Big(\sin (2M + 2\sigma) - \sin 2M\Big) = \sin \sigma \cos (2M + \sigma) \tag{11}$$

$$\int_M^{M+\sigma} \cos 4x \, dx = \frac{1}{4} \Big(\sin (4M + 4\sigma) - \sin 4M\Big) = \frac{1}{2} \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \tag{12}$$

Damit kann man die Integrale von (9), d. h. auch die Integration von (8) zusammensetzen, wodurch man einen Ausdruck von dieser Form erhält:

$$s = A b \sigma - B b \sin \sigma \cos (2M + \sigma) - C b \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \tag{13}$$

Dabei haben die Coëfficienten A, B und C folgende Bedeutungen:

$$A = \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right) \quad , \quad B = \left(\frac{1}{4} k^2 - \frac{1}{16} k^4\right) \quad , \quad C = \left(\frac{1}{128} k^4\right) \tag{14}$$

Die Umkehrung von (13) giebt:

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \tag{15}$$

wobei die neu eingeführten Coëfficienten sind (mit Zusetzung der nötigen ϱ):

$$\alpha = \frac{1}{A} \varrho \quad , \quad \beta = \frac{B}{A} \varrho \quad , \quad \gamma = \frac{C}{A} \varrho \tag{16}$$

In gleicher Weise behandeln wir auch die Differential-Gleichung für den Längenunterschied, nämlich nach (7) und (8) § 104. S. 525:

$$dl = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} \, d\lambda \tag{17}$$

Hier wird nach (11) S. 169 entwickelt:

$$\sqrt{1-e^2\cos^2\psi} = 1 - \frac{e^2}{2}\cos^2\psi - \frac{e^4}{8}\cos^4\psi - \frac{e^6}{16}\cos^6\psi \tag{18}$$

Hiebei bestehen sphärische Gleichungen, nach (1) § 61. S. 347:

$$d\lambda\cos\psi = d\sigma\sin\alpha$$

dann nach den zu Fig. 2. gehörigen Gleichungen (2):

$$\sin\alpha = \frac{\sin m}{\cos\psi} \quad , \quad \text{also } d\lambda = \frac{\sin m}{\cos^2\psi}\,d\sigma \tag{19}$$

Damit kann man (17) in eine Integration nach σ umformen, nämlich mit Rücksicht auf (18):

$$l = \lambda - e^2\sin m\int\left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8}\cos^2\psi + \frac{e^4}{16}\cos^4\psi + \ldots\right)d\sigma \tag{20}$$

Nun hat man wieder nach (6):

$$\cos^2\psi = 1 - \cos^2 m\sin^2 x$$
$$\cos^4\psi = 1 - 2\cos^2 m\sin^2 x + \cos^4 m\sin^4 x$$

Ausserdem hat man $\sin^2 x$ und $\sin^4 x$ ausgedrückt in $\cos 2x$ und $\cos 4x$ durch (9), und all dieses zusammen bringt die zu integrierende Funktion (20) auf eine Reihe, welche nach $\cos 2x$, $\cos 4x$ u. s. w. fortschreitet, d. h. (20) wird:

$$l = \lambda - e^2\sin m\int(A' + B'\cos 2x + C'\cos 4x + \ldots)\,dx \tag{21}$$

Dabei haben die Coëfficienten folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{16} - \frac{e^2}{16}\cos^2 m - \frac{e^4}{16}\cos^2 m + \frac{3}{128}e^4\cos^4 m \\ B' &= \frac{e^2}{16}\cos^2 m + \frac{e^4}{16}\cos^2 m - \frac{e^4}{32}\cos^4 m \\ C' &= \frac{e^4}{128}\cos^4 m \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Denkt man sich diese Coëfficienten in (21) eingesetzt, integriert, und die Grenzen ebenso wie früher bei (11) und (12) eingeführt, so überblickt man leicht, dass folgendes erhalten wird:

$$l = \lambda - e^2\sin m\left(A'\sigma + B'\sin\sigma\cos(2M+\sigma) + \frac{C'}{2}\sin 2\sigma\cos(4M+2\sigma) + \ldots\right) \tag{23}$$

Hier ist noch bei B' und C' der Faktor ϱ zuzusetzen; indem wir dieses thun, und auch e^2 in die Klammer hineinziehen, bilden wir aus (23) diese letzte Form:

$$l = \lambda - \sin m\left(\alpha'\sigma + \beta'\sin\sigma\cos(2M+\sigma) + \gamma'\sin 2\sigma\cos(4M+2\sigma)\right) \tag{24}$$

Dabei ist:

$$\alpha' = A'e^2 \quad , \quad \beta' = B'e^2\varrho \quad , \quad \gamma' = \frac{C'e^2}{2}\varrho \tag{25}$$

Entwicklung auf höhere Potenzen.

Wir haben in der vorstehenden Entwicklung nur so viele Glieder beibehalten, als man bequem überschauen kann, und so viele, als für gewöhnlich nötig sind.

Zu einem sicheren Urteil über den Einfluss der höheren Glieder muss man die Weiter-Entwicklung der vorstehenden Reihen machen. Wir setzen nur die Schlussergebnisse der Reihen-Entwicklung hier her.

Die Reihe (15) bekommt noch ein Glied, und ist dann:

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin\sigma \cos(2M+\sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos(4M+2\sigma) + \delta \sin 3\sigma \cos(6M+3\sigma) \quad (26)$$

Folgendes sind die dazu gehörigen Coëfficienten mit $k = e' \cos m$:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{A}\varrho \;, & A &= \left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 - \frac{175}{36384}k^8\right) \\
\beta &= \frac{B}{A}\varrho \;, & B &= \left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16} + \frac{15}{112}k^6 - \frac{35}{2048}k^8\right) \\
\gamma &= \frac{C}{A}\varrho \;, & C &= \left(\frac{k^4}{128} - \frac{3}{512}k^6 + \frac{35}{8192}k^8\right) \\
\delta &= \frac{D}{A}\varrho \;, & D &= \left(\frac{k^6}{1536} - \frac{5}{6144}k^8\right) \\
\varepsilon &= \frac{E}{A}\varrho \;, & E &= \left(\frac{5}{65536}k^8\right)
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Auch die Reihe (24) bekommt ein weiteres Glied und wird:

$$\begin{aligned} l = \lambda - \sin m \Big(\alpha' \sigma + \beta' \sin\sigma \cos(2M+\sigma) + \gamma' \sin 2\sigma \cos(4M+2\sigma) \\ + \delta' \sin 3\sigma \cos(6M+3\sigma)\Big) \end{aligned} \quad (28$$

Folgendes sind die hiezu gehörenden Coëfficienten:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{e^2}{2}\left(1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5e^6}{64}\right) - \frac{e^4 \cos^2 m}{16}\left(1 + e^2 + \frac{15}{16}e^4\right) \\
&\qquad + \frac{3}{16}e^6 \cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) - \frac{25}{2048}e^8 \cos^6 m \\
\beta' &= \varrho\left(\frac{e^4}{16}\cos^2 m \left(1 + e^2 + \frac{15}{16}e^4\right) - \frac{e^6}{32}\cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) + \frac{75}{4096}e^8 \cos^6 m\right) \\
\gamma &= \varrho\left(\frac{e^6}{256}\cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) - \frac{15}{4096}e^8 \cos^6 m\right) \\
\delta &= \varrho\left(\frac{5}{12288}e^3 \cos^6 m\right)
\end{aligned}\right\} \quad (28a)$$

Wenn man hier alle konstanten Teile mit der Bessel schen Excentricität e ($\log e^2 = 7.824\,4104.237$ nach S. 193) ausrechnet, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha' &= 0{,}003\,342\,773\,183 - [4.447\,6079]\cos^2 m + [1.84854]\cos^4 m - [9.3843]\cos^6 m \\
\beta' &= [9{,}762\,0330]\cos^2 m - [7.28791]\cos^4 m + [4.87477]\cos^6 m \\
\gamma' &= [6{,}38482]\cos^4 m - [4.17580]\cos^6 m \\
\delta' &= [3.22156]\cos^6 m
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Diese Reihen gehen weit über das gewöhnliche Bedürfnis. Bei geodätischen Linien von mehreren Graden Ausdehnung braucht man von (29) meist nur α' und β' und dabei nur die zwei ersten Glieder von α' und das erste Glied von β'.

Etwas mehr braucht man gewöhnlich bei der Reihe (26) mit den Coëfficienten (27), doch auch meist nur α, β und γ nur etwa bis k^4. Dabei ist etwa 8 stellige Logarithmen-Rechnung angenommen. Mit den Coëfficienten (27) und (29) kann man auch die grössten Fälle 10 stellig berechnen.

Anwendung der vorstehenden Entwicklungen.

Durch die Gleichungen (26) und (28) mit den zugehörigen Coëfficienten α, β, γ, $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ u. s. w. sind die gesuchten Beziehungen zwischen Fig. 1. und Fig. 2 hergestellt und man kann damit das Polardreieck auflösen in folgender Weise:

Von einem Punkte des Ellipsoids mit der geographischen Breite φ geht eine geodätische Linie s unter dem Azimut α aus; man soll die Breite φ' des Endpunktes dieser geodätischen Linie bestimmen, sowie das Azimut α' daselbst und den Längenunterschied l beider Punkte.

Aus der gegebenen Breite φ berechnet man die zugehörige reduzierte Breite ψ nach der Gleichung $tang\,\psi = \sqrt{1-e^2}\,tang\,\varphi$ (oder nach einem anderen in § 103. angegebenen Verfahren). Mit diesem ψ und dem Azimut α kann man in dem sphärischen rechtwinkligen Dreieck in Fig. 2. die beiden Hilfsgrössen m und M bestimmen und damit die Gleichung (15) oder (26) nach σ auflösen.

Damit hat man drei Stücke ψ, α, σ, mit welchen das schiefwinklige sphärische Dreieck von Fig. 2. aufgelöst werden kann, so dass die jenseitige sphärische Breite ψ' und der sphärische Längenunterschied λ bekannt werden.

Von der sphärischen (reduzierten) Breite ψ' geht man zurück zu der wirklichen Breite φ' durch die Gleichung $tang\,\varphi' = tang\,\psi'\sqrt{1+e'^2}$ (oder durch ein anderes in § 103. angegebenes Verfahren), und von der sphärischen Länge λ kommt man zu der sphäroidischen Länge l durch die Gleichung (24) oder (28), womit die Lösung der ganzen Aufgabe vollendet ist.

Zu einem Zahlen-Beispiel hiefür wollen wir nach (5) § 73. S. 392 nehmen:

$$\text{Berlin} \quad \varphi = 52^\circ\,30'\,16{,}7000'' \tag{30}$$

$$\text{Berlin-Königsberg} \quad \alpha = 59^\circ\,33'\;0{,}6892'' \quad log\,s = 5.724\,2591{\cdot}353 \tag{31}$$

Die Berechnung der reduzierten Breite von Berlin haben wir bereits in (26) § 103. S. 523 behandelt und gefunden:

$$\text{Berlin} \quad \psi = 52^\circ\,24'\,43{,}0114'' \tag{32}$$

Nun kommt die Berechnung von m und M nach den Gleichungen (2) und (3):

$$m = 31^\circ\,43'\,31{,}13'' \qquad M = 68^\circ\,41'\,19{,}95'' \tag{33}$$

Weiter brauchen wir die Coëfficienten zur Berechnung von σ, und zwar zuerst $k' = e'\cos m$ nach (8), es ist:

$$log\,e'\cos m = log\,k' = 8{,}843\,3740$$

und damit nach (14) und (16) hinreichend genau, ohne die Weiter-Entwicklung (27):

$$log\,A = 0.000\,5270{\cdot}0 \qquad log\,B = 7.084\,1599{\cdot}2 \qquad log\,C = 3.266\,286$$
$$log\,\alpha = 5.313\,8981{\cdot}0 \qquad log\,\beta = 2.398\,0580{\cdot}5 \qquad log\,\gamma = 8.580\,184$$

Mit diesen Coëfficienten α, β, γ kann man die Gleichung (15) nach σ auflösen, allerdings nicht geradezu, weil σ selbst rechts vorkommt; allein die Reihe (15) ist sehr rasch konvergierend, so dass es genügt, einen ersten Näherungswert von σ nur aus dem ersten Gliede von (15) zu berechnen, d. h. $\sigma = \frac{a\,s}{b}$ zu setzen, womit man auch die folgenden Glieder ausrechnen kann; oder kurz, man löst die Gleichung (15) durch Näherung indirekt, stufenweise nach σ auf. Dieses Verfahren gab in unserem Falle:

$$\begin{array}{ll} \text{erste Näherung} \quad \alpha\dfrac{s}{b} = \sigma = & 4^\circ\;46'\;17{,}8'' \\ \text{hiezu}\; \beta\sin\sigma\cos(2\,M+\sigma) = - & 16{,}4'' \\ \hline \text{zweite Näherung} \qquad \sigma = & 4^\circ\;46'\;\;\;1{,}4'' \end{array}$$

Damit kann man das zweite und dritte Glied von (15) ausrechnen, und hat dann im ganzen:

$$\alpha \frac{s}{b} = 4^\circ\ 46'\ 17{,}8176''$$
$$\beta \sin\sigma \cos(2M + \sigma) = -\qquad 16{,}4086''$$
$$\gamma \sin 2\sigma \cos(4M + 2\sigma) = +\qquad 0{,}0015''$$
$$\text{endgiltig}\quad \sigma = 4^\circ\ 46'\ 1{,}4105'' \tag{34}$$

Nun stellen wir von (32), (31), (34) zusammen:

$$\psi = 52^\circ\ 24'\ 43{,}0114'' \qquad \alpha = 59^\circ\ 33'\ 0{,}6892'' \qquad \sigma = 4^\circ\ 46'\ 1{,}4105'' \tag{34a}$$

Damit kann man das sphärische Dreieck auflösen, welches ψ', α' und λ liefert; die Rechnung nach den Formeln (14) und (15) § 60. S. 341 (in gleicher Weise wie das Zahlen-Beispiel auf S. 341—342) hat ergeben:

$$\psi' = 54^\circ\ 37'\ 24{,}7566'' \qquad \alpha' = 65^\circ\ 16'\ 9{,}3655'' \tag{35}$$
$$\lambda = 7^\circ\ 6'\ 30{,}1340'' \tag{36}$$

Der so gefundene sphärische Wert ψ' ist die reduzierte Breite von Königsberg, woraus man nach § 103. die wirkliche Breite berechnet, nämlich:

$$\varphi' = 54^\circ\ 42'\ 50{,}6002'' \tag{37}$$

Nun haben wir noch die Aufgabe, den sphärischen Längenunterschied λ von (36) in den sphäroidischen Längenunterschied l zu verwandeln, wozu die Gleichung (28) mit den Coëfficienten (29) dient. Wir berechnen nach (29), jedoch nur mit den Gliedern bis $\cos^4 m$:

$$\log \alpha' = 7.523\,8439 \qquad \log \beta' = 9.62045 \qquad \log \gamma' = 6.098$$

Demnach (24):

$$l = \lambda - 30{,}1479'' + 0{,}0144'' + 0{,}0000 \ldots = \lambda - 30{,}1335''$$

also nach (32):

$$l = 7^\circ\ 6'\ 30{,}1340'' - 30{,}1335'' = 7^\circ\ 6'\ 0{,}0005'' \tag{38}$$

Nun haben wir in (37), (35), (38) die ganze Auflösung:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Königsberg} & \varphi' = 54^\circ\ 42'\ 50{,}6002'' \\ \text{Königsberg-Berlin} & \alpha' = 65^\circ\ 16'\ \ 9{,}3655'' \quad , \quad l = 7^\circ\ 6'\ 0{,}0005'' \end{array}\right\} \tag{39}$$

Mit den erweiterten Formeln (26)—(29) wollen wir auch noch das grosse Normal-Beispiel (2) § 73. S. 391 berechnen, wofür die Hauptzahlen folgende sind:

$$\text{Gegeben}\quad \varphi = 45^\circ\ 0'\ 0'' \qquad \alpha = 29^\circ\ 3'\ 15{,}4598'' \tag{40}$$
$$\log s = 6.120\,6674{\cdot}805 \tag{41}$$

Die Rechnung beginnt mit der reduzierten Breite zu $\varphi = 45^\circ$:

$$\psi = 44^\circ\ 54'\ 14{,}67493'' \tag{42}$$

Das rechtwinklige sphärische Hilfsdreieck giebt:

$$m = 20^\circ\ 7'\ 8{,}712'' \qquad M = 48^\circ\ 44'\ 46{,}551'' \tag{43}$$

Die Coëfficienten zur Berechnung von σ werden nach (27):

$\log \alpha = 5.313\,7831{\cdot}066$, $\log \beta = 2.483\,7124$, $\log \gamma = 8.749\,94$, $\log \delta = 5.445$

und damit σ selbst in 4 Gliedern:

$$\sigma = 42\,782{,}021\,652'' - 20{,}794\,012'' - 0{,}017\,667'' + 0{,}000\,012''$$
$$\sigma = 11^\circ\ 52'\ 41{,}20998'' \tag{44}$$

Mit ψ, α und σ von (42), (40) und (44) wird das sphärische Dreieck aufgelöst; dasselbe giebt:

$$\psi' = 54^\circ\ 54'\ 35{,}3145'' \qquad \alpha' = 36^\circ\ 45'\ 7{,}4006'' \tag{45}$$
$$\lambda = 10^\circ\ 0'\ 49{,}11952'' \tag{46}$$

Die reduzierte Breite ψ' wird in die Breite φ' verwandelt, nach § 103, nämlich:

$$\varphi' = 54^\circ\ 59'\ 59{,}9999'' \quad (\text{soll } 55^\circ\ 0'\ 0'') \tag{47}$$

Das Azimut α' nach (45) ist bereits auch sphäroidisches Azimut; wir haben also, um die Auflösung zu vollenden, nur noch λ von (46) in l zu verwandeln, wozu die Gleichung (28) mit den Coëfficienten (29) dient.

Die Coëfficienten-Berechnung nach (29) giebt:

$$\log \alpha' = 7.523\,7864{\cdot}329 \qquad \log \beta' = 9.706\,0623 \qquad \log \gamma' = 6.27300$$

und damit wird:

$$l = \lambda - 49{,}131\,513'' + 0{,}011\,935'' + 0{,}000\,020 = -\,49{,}119\,558''$$

also nach (46): $\quad l = 9^\circ\ 59'\ 59{,}99996'' \quad (\text{soll} = 10^\circ\ 0'\ 0'')$ (48)

In α', φ' und l von (45), (47) und (48) haben wir die vollständige Auflösung der gestellten Aufgabe in hinreichender Übereinstimmung mit den Angaben von (2) § 73. S. 391.

Umkehrung der Aufgabe.

Wenn nicht φ, α und s gegeben sind, sondern φ, φ' und λ, so dass s, α und α' gesucht werden, so kann man das im Vorstehenden behandelte Verfahren auch noch anwenden, aber nur indirekt und umständlich, weil die sphärischen Winkel m und M, oder in erster Näherung wenigstens m, bereits zur Reduktion von l auf λ gebraucht werden.

Indessen haben wir für den Fall, dass φ, φ' und l gegeben, und s, α und α' gesucht sind, die günstigere Auflösung unseres nachfolgenden § 106.

Vergleichung unserer Formeln mit der Bessel schen Methode.

Der Grundgedanke der Auflösung eines sphäroidischen Polar-Dreiecks durch ein sphärisches Hilfs-Dreieck mit reduzierten Breiten ist von Bessel behandelt in einer Abhandlung: „Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen, Astr. Nachr Nr. 86, 4. Band 1826", S. 241—254, nebst „Tafeln zur Berechnung der geodätischen Vermessungen".

Diese Bessel sche Theorie mit den Hilfstafeln bildet auch einen Teil des Werkes: „Das Messen auf der sphäroidischen Oberfläche u. s. w. von J. J. Baeyer, Berlin 1862".

Um die Bessel sche Methode nebst ihren Hilfstafeln mit den Formeln unseres vorstehenden § 105. zu vergleichen, bemerken wir zuerst, dass unsere Coëfficienten α, β, γ nach (27) dieselben sind, wie die Bessel schen Coëfficienten α, β, γ, deren Logarithmen in der ersten Bessel schen Hilfstafel enthalten sind; allerdings ist die Form der Berechnung in beiden Fällen verschieden.

Die Coëfficienten α', β', γ' des zweiten Teils der Bessel schen Hilfstafel sind mit unseren Coëfficienten α', β', γ' von (29) nicht unmittelbar identisch, aber sie sind denselben proportional. Es kommt bei Bessel ein konstanter Faktor in Rechnung, den wir hier F nennen wollen:

$$F = \frac{e^2}{\sqrt[3]{1-0{,}75\,e^2}} \qquad (\log F = 7.825\,1369{\cdot}0) \tag{49}$$

Indem wir für den nächsten Zweck der Vergleichung die Bessel schen Coëfficienten mit α'', β'', γ'' bezeichnen, und mit α', β', γ' die Coëfficienten unserer Entwicklnug nach (29) S. 528, haben wir:

$$F\alpha'' = \alpha' \quad , \quad F\beta'' = \beta' \quad , \quad F\gamma'' = \gamma' \tag{50}$$

Als Argument für die erste Bessel sche Tafel, $\log \alpha$, $\log \beta$, $\log \gamma$ dient der Logarithmus des Modulus $k = e' \cos m$, welcher nach (8) und (27) auch Argument unserer α, β, γ ist, also erstes Argument $= \log e' \cos m$. Dagegen für den zweiten Teil der Bessel schen Tafel dient als Argument eine Grösse $\log k'$, wobei k' diese Bedeutung hat:

$$k' = \frac{e\sqrt{0{,}75}}{\sqrt{1-0{,}75e^2}} \cos m \qquad \left(\log \frac{e\sqrt{0{,}75}}{\sqrt{1-0{,}75e^2}} = 8.850\,8255{\cdot}6\right) \tag{51}$$

Mit diesen Beziehungen kann man unsere Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ statt sie nach (27) und (29) zu berechnen, auch aus der Bessel schen Hilfstafel entnehmen, indem man mit dem Argument $\log e' \cos m$ in den ersten Teil und mit dem Argument $\log k'$ nach (51) in den zweiten Teil von Bessels Tafel eingeht, worauf zu den gefundenen $\log \alpha'$ und $\log \beta'$ noch der konstante $\log F$ nach (49) zu addieren ist, um unsere α', β' zu erhalten.