Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 106. Neue Auflösung des geodätischen Polar-Dreiecks

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

§ 106. Neue Auflösung des geodätischen Polar-Dreiecks.*)

(Bezeichnungen nach Fig. 1. und Fig. 2. § 104. S. 524.)

Wir nehmen die zwei Differential-Grundformeln nach (6), (7) § 104. S. 525 nochmals vor: nämlich:

$$d\sigma = \frac{V}{a} d s \tag{1}$$

$$d\lambda = V d l \tag{2}$$

wobei, wie gewöhnlich, V diese Bedeutung hat:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \qquad (e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2) \tag{3}$$

Wenn die beiden Gleichungen (1) und (2) integriert sind, so sind alle Beziehungen zwischen einem geodätischen Polar-Dreieck und einem sphärischen Polar-Hilfsdreieck (Fig. 1. und Fig. 2. S. 524) bekannt, und man kann die Aufgabe auflösen, wie wir in § 104. S. 524 auseinandergesetzt haben.

Wir wollen nun die Integration der Grundgleichungen (1) und (2) durch Entwicklung nach dem Maclaurin schen Satze bewirken, d. h. zunächst bis zur dritten Potenz, durch Entwicklung der Reihen:

$$\sigma = \left.\frac{d\sigma}{ds}\right] s + \left.\frac{d^2\sigma}{ds^2}\right] \frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^3\sigma}{ds^3}\right] \frac{s^3}{6} \tag{4}$$

$$\lambda = \left.\frac{d\lambda}{dl}\right] l + \left.\frac{d^2\lambda}{dl^2}\right] \frac{l^2}{2} + \left.\frac{d^3\lambda}{dl^3}\right] \frac{l^3}{6} \tag{5}$$

Wir gehen zuerst näher auf (4) ein, und weil a konstant, nämlich nach (9) § 31. S. 189 $a = c\sqrt{1-e^2}$ ist, haben wir aus (1):

$$\sqrt{1-e^2}\,\sigma = \frac{1}{c}\left\{ V s + \left.\frac{dV}{ds}\right] \frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^2 V}{ds^2}\right] \frac{s^3}{6} \right\} \tag{6}$$

Die hier nötigen Ableitungen machen wir in gleicher Form und Behandlung wie früher in § 74. die Ableitungen für φ, l und α. Auch citieren wir von dort (5), (6), (7), § 74. S. 393 mit $\operatorname{tang} \varphi = t$:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^3}{c} \cos\alpha \quad , \quad \frac{dl}{ds} = \frac{V \sin\alpha}{c \cos\varphi} \quad , \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{V}{c} \sin\alpha\, t \tag{7}$$

(13), (14), S. 393:
$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t \quad , \quad \frac{dV}{ds} = -\eta^2 \frac{V^2}{c} \cos\alpha\, t \tag{8}$$

Weiter wird abgeleitet:

$$\frac{d^2 V}{ds^2} = -\eta^2 \frac{V^3}{c^2} \left\{ \cos^2\alpha\,(1 - t^2 + \eta^2 - 3\,\eta^2 t^2) - \sin^2\alpha\, t^2 \right\} \tag{9}$$

Nun kann man bereits die Formel (6) zusammensetzen, und man bemerkt, dass dabei s mit V und c immer in derselben Kombination vorkommen, wie auch bei den früheren Reihen (vgl. (22) § 74. S. 394), wir setzen deshalb für analytisches Mass (ohne ϱ):

$$\frac{V}{c} s = S \tag{10}$$

und damit geben (6), (8) und (9):

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = S - \frac{S^2}{2} \cos\alpha\, \eta^2 t - \frac{S^3}{6} \eta^2 \left(\cos^2\alpha\,(1 - t^2 + \eta^2 - 3\,\eta^2 t^2) - \sin^2\alpha\, t^2 \right) \tag{11}$$

*) Erstmals veröffentlicht in der „Zeitschr. f. Verm.“, 1883, S. 65—82.

In gleicher Weise haben wir auch die Längen-Formel zu bilden, nämlich zunächst (2) und (5):

$$\lambda = V\,l + \frac{d\,V}{d\,l}\bigg]\frac{l^2}{2} + \frac{d^2\,V}{d\,l^2}\bigg]\frac{l^3}{6} \tag{12}$$

Die hiezu nötigen Ableitungen sind:

$$\frac{d\,V}{d\,l} = \frac{d\,V}{d\,\varphi}\frac{d\,\varphi}{d\,l} \quad , \quad \frac{d\,\varphi}{d\,l} = V^2 \operatorname{cotg}\alpha \cos\varphi \quad , \quad \frac{d\,\alpha}{d\,l} = \sin\varphi$$

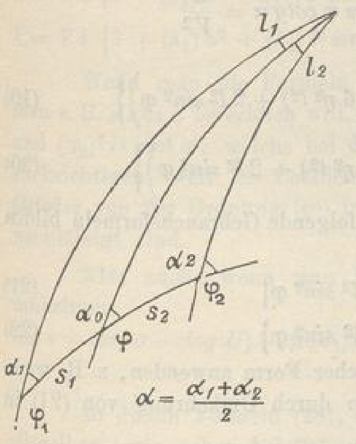
$$\frac{d\,V}{d\,l} = -\eta^2\,V \operatorname{cotg}\alpha \sin\varphi \quad \text{oder} \quad = -\eta^2\,V\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\cos\alpha\,t \tag{13}$$

$$\frac{d^2\,V}{d\,l^2} = -\eta^2\,V\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\Big\{\cos^2\alpha\,(1 - 3\,t^2 + \eta^2 - 3\,\eta^2\,t^2) - \sin^2\alpha\,t^2\Big\} \tag{14}$$

Damit kann man (12) zusammensetzen:

$$\lambda = V\Big\{l - \frac{l^2}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\eta^2\cos\alpha\,t - \frac{l^3}{6}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\eta^2(\cos^2\alpha\,(1-3\,t^2+\eta^2-3\,\eta^2\,t^2)-\sin^2\alpha\,t^2)\Big\} \tag{15}$$

Fig. 1.



Die Formeln (11) und (15) geben σ und λ als Funktion der Ausgangsbreite φ und des Ausgangsazimutes α der geodätischen Linie; wir wollen nun aber das Prinzip des mittleren Argumentes anwenden, welches bereits in § 77. sehr nützliche Dienste geleistet hat.

Wir nehmen zu diesem Zwecke die Bezeichnungen von nebenstehender Fig. 1. an, d. h. wir nehmen drei Punkte in gleichen Breiten-Abständen:

$$\varphi_2 - \varphi = \varphi - \varphi_1 \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \tag{16}$$

Von der Mittelbreite φ geht eine geodätische Linie s_2 unter dem Azimut α_0 aus, und eine zweite geodätische Linie s_1 unter dem Azimut $\alpha_0 \pm 180°$. Den geodätischen Linien s_2 und s_1, deren Summe $s_2 + s_1 = s$ sei, entsprechen zwei Grössen S_2 und S_1 nach (10), mit der Summe $S_2 + S_1 = S$. Damit giebt die doppelte Anwendung der Formel (11):

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = S - \frac{S_2^2 - S_1^2}{2}\cos\alpha_0\,\eta^2\,t - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6}\eta^2(\cos^2\alpha_0\,(1-t^2+\eta^2-3\,\eta^2\,t^2) - \sin\alpha_0\,t^2)$$

Hier ist von (4) § 77. S. 403 zu benützen:

$$S_2 - S_1 = \frac{S^2}{4}\,t\left(\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0} + 3\,\eta^2\cos\alpha_0\right)$$

Wenn man dieses in das Vorstehende einsetzt, so darf man auch überall α statt α_0 schreiben, und damit bekommt man:

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = S - \frac{S^3}{24}\eta^2\Big\{\sin^2\alpha\,2\,t^2 + \cos^2\alpha\,(1 - t^2 + \eta^2 + 6\,\eta^2\,t^2)\Big\} \tag{17}$$

Nun wenden wir auch die Gleichung (15) in zweifacher Weise auf Fig. 1. an und erhalten mit $l_2 + l_1 = l$, $\lambda_2 + \lambda_1 = \lambda$:

$$\lambda = V\Big\{l - \frac{l_2^2 - l_1^2}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha_0}\eta^2\cos\alpha_0\,t$$
$$- \frac{l_2^3 + l_1^3}{6}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha_0}\eta^2(\cos^2\alpha_0\,(1 - 3\,t^2 + \eta^2 - 3\,\eta^2\,t^2) - \sin^2\alpha\,t^2)\Big\}$$

Hiezu hat man von (17) § 77. S. 404:

$$(l_2 - l_1) \cos \varphi = \frac{S^2}{4} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} t + \frac{S^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha \, t \, (2 + 3 \eta^2)$$

Hier kann man setzen $S \sin \alpha = l \cos \varphi$, also:

$$(l_2 \quad l_1) = \frac{l^2}{4} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos \varphi \, t + \frac{l^2}{4} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cos \varphi \, t \, (2 + 3 \eta^2)$$

Dieses setzt man in die vorhergehende Formel für λ, wobei auch wieder α_0 und α vertauscht werden können; dadurch erhält man:

$$\lambda = V \left\{ l - \frac{l^3}{24} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha} \eta^2 \left(\sin^2 \alpha^2 t^2 + \cos^2 \alpha \, (1 + 3 t^2 + \eta_2 + 6 \eta^2 t^2) \right) \right\} \tag{18}$$

Die Gleichungen (17) und (18) enthalten bereits die Lösung unserer Aufgabe, wenn man S, α und l wenigstens näherungsweise als gegeben voraussetzt; indessen ist es bequemer, alles auf den Breiten-Unterschied b und den Längen-Unterschied l zu reduzieren. Hiezu hat man für die Korrektionsglieder:

$$S \sin \alpha = l \cos \varphi \quad , \quad S \cos \alpha = l \cos \varphi \cot g \, \alpha = \frac{b}{V^2}$$

Dieses in (17) und (18) eingesetzt giebt:

$$\sigma = \frac{S}{\sqrt{1 - e^2}} \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left(\frac{b^2}{V^4} (1 - t^2 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2) + 2 l^2 \sin^2 \varphi \right) \right\} \tag{19}$$

$$\lambda = V l \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left(\frac{b^2}{V^4} (1 + 3 t^2 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2) + 2 l^2 \sin^2 \varphi \right) \right\} \tag{20}$$

Wir wollen die Coëfficienten herausheben und folgende Gebrauchsformeln bilden (mit Berücksichtigung der nötigen ϱ):

$$\sigma = U s \left\{ 1 + (\sigma_1) b^2 + (\sigma_2) l^2 \sin^2 \varphi \right\} \tag{21}$$

$$\lambda = V l \left\{ 1 + (\lambda_1) b^2 + (\lambda_2) l^2 \sin^2 \varphi \right\} \tag{22}$$

Man kann diese Formeln auch in logarithmischer Form anwenden, z. B. wenn $\log \sigma$ gegeben und $\log s$ zu bestimmen ist, hat man durch Umkehrung von (21) in logarithmischer Form:

$$\log s = (\log \sigma - \log U) - \mu (\sigma_1) b^2 - \mu (\sigma_2) l^2 \sin^2 \varphi \tag{23}$$

Dabei ist V die bisher immer mit V bezeichnete Funktion:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{24}$$

und

$$U = \frac{V}{c \sqrt{1 - e^2}} \varrho \quad \text{oder} \quad = \frac{V}{a} \varrho$$

$$\log U = \log V + 8.509\,7816 \cdot 695 \tag{25}$$

Den Wert $\log V$ bzw. $\log V^2$ kann man aus der Hilfstafel S. [2]—[7] unseres Anhangs 10 stellig entnehmen und nach (25) hat man dann auch $\log U$.

Für die Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_2) in (21) und (22) ergeben sich durch Vergleichung mit (19) und (20) folgende Bedeutungen:

$$(\sigma_1) = + \frac{\eta^2}{24 \varrho^2 V^4} (t^2 - (1 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2)) \quad , \quad (\sigma_2) = - \frac{\eta^2}{12 \varrho^2} \tag{26}$$

$$(\lambda_1) = - \frac{\eta^2}{24 \varrho^2 V^4} (3 t^2 + 1 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2) \quad , \quad (\lambda_2) = - \frac{\eta^2}{12 \varrho^2} \tag{27}$$

Dabei sind die konstanten Coëfficienten-Logarithmen:

$$\log \frac{1}{24 \varrho^2} = 7.990\,9385 - 20 \quad , \quad \log \frac{1}{12 \varrho^2} = 8.291\,9685 - 20$$

Weiter-Entwicklung bis zur fünften Ordnung.

Man kann mit den bisher entwickelten Formeln bereits geodätische Linien von mehreren Grad Ausdehnung berechnen, wie aus der Vergleichung der nachfolgenden Zahlen-Beispiele mit den Ergebnissen von § 105. zu ersehen ist.

Das beste Mittel jedoch, zur Gewinnung eines Urteils über das bisher behandelte Verfahren und über die Möglichkeit seiner Erweiterung, hat man in der Weiter-Entwicklung um eine Stufe höher, d. h. bis zur fünften Ordnung.

Wir haben diese Entwicklung durchgeführt, und in der „Zeitschr. f. Verm., 1883“, S. 72—76 die Haupt-Zwischenstufen angegeben; da es sich dabei um sehr lange, im Druck kaum wiederzugebende Formelhäufungen handelt, deren mathematischer Grundgedanke schon durch das Vorhergehende völlig klar gemacht ist, geben wir hier nur die End-Ergebnisse.

Die Formeln (21) und (22) werden so erweitert (vgl. (30) und (31)):

$$\sigma = U s \left\{1 + (\sigma_1)\, b^2 + (\sigma_2)\, l^2 \sin^2\varphi + (\sigma_3)\, b^4 + (\sigma_4)\, b^2 l^2 \cos^2\varphi + (\sigma_5)\, l^4 \cos^4\varphi\right\} \qquad (28)$$

$$\lambda = V l \left\{1 + (\lambda_1)\, b^2 + (\lambda_2)\, l^2 \sin^2\varphi + (\lambda_3)\, b^4 + (\lambda_4)\, b^2 l^2 \cos^2\varphi + (\lambda_5)\, l^4 \cos^4\varphi\right\} \qquad (29)$$

Wenn man die Formeln (28) und (29) umgekehrt anwenden will, d. h. wenn man z. B. s aus σ berechnen will, so braucht man die Glieder $(\sigma_1)^2 b^4$, $(\sigma_1)(\sigma_2)\, b^2 l^2 \sin^2\varphi$ und $(\sigma_2)^2 l^4 \sin^4\varphi$, welche bei der Reihenumkehrung zunächst auftreten, nicht zu berücksichtigen, weil die Coëfficienten (σ_1) und (σ_2) beide den Faktor η^2 haben, und Glieder von der Ordnung (η^4) in den Coëfficienten (σ_3), (σ_4) und (σ_5) überhaupt vernachlässigt sind.

Also auch, wenn man logarithmisch rechnen will, kann man (28) kurz so umkehren:

$$\left.\begin{aligned} \log s = (\log\sigma - \log U) - \mu(\sigma_1)\, b^2 - \mu(\sigma_2)\, l^2 \sin^2\varphi - \mu(\sigma_3)\, b^4 \\ - \mu(\sigma_4)\, b^2 l^2 \cos^2\varphi - \mu(\sigma_5)\, l^4 \cos^4\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

In diesen Formeln (28), (29), (30) sind die Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_2) dieselben, wie schon bei (26) und (27) angegeben wurde; die übrigen haben, auf η^2 einschliesslich genau, folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_3) &= \frac{\eta^2}{480\,\varrho^4}(1 - t^2) &&= [3.88838]\cos^2\varphi\,(1 - t^2) \\ (\sigma_4) &= \frac{\eta^2}{720\,\varrho^4}(-1 + 2\,t^2 + 15\,t^4) &&= [3.712\,229]\cos^2\varphi\,(-1 + 2\,t^2 + 15\,t^4) \\ (\sigma_5) &= -\frac{\eta^2}{720\,\varrho^4}(9\,t^2 - 5\,t^4) &&= [3.712\,229_n]\cos^2\varphi\,(9\,t^2 - 5\,t^4) \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

$$\left.\begin{aligned} (\lambda^3) &= -\frac{\eta^2}{1440\,\varrho^4}(1 + 15\,t^2) &&= [3.411\,256_n]\cos^2\varphi\,(1 + 15\,t^2) \\ (\lambda_4) &= \frac{\eta^2}{720\,\varrho^4}(-1 - 10\,t^2 + 15\,t^4) &&= [3.712\,286]\cos^2\varphi\,(-1 - 10\,t^2 + 15\,t^4) \\ (\lambda_4) &= \frac{\eta^2}{240\,\varrho^4}(-3\,t^2 + t^4) &&= [4.189\,407]\cos\varphi\,(-3\,t^2 + t^4) \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Die eingeklammerten Zahlen sind hier Logarithmen, und angehängtes n bedeutet, dass die zugehörige Zahl negativ ist. Wie immer bedeutet $\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi$ und $t = \tan\varphi$.

Eine Coëfficienten-Tabelle haben wir hiernach berechnet und auf S. [62]—[63] des Anhangs mitgeteilt. Zu Weiterem können auch die Tabellen [47] und [48] des Anhangs benützt werden.

In den vorstehenden Formeln kommen verschiedene Konstanten vor, welche wir zum Gebrauch hier zusammenstellen:

$$\left.\begin{array}{ll}
log\,(1:\ \ 12\,\varrho^2) = 8.291\,9684{\cdot}9 - 20 & log\,(e'^2:\ \ 12\,\varrho^2) = 6.119\,2832{\cdot}7 - 20 \\
log\,(1:\ \ 24\,\varrho^2) = 7.990\,9384{\cdot}9 - 20 & log\,(e'^2:\ \ 24\,\varrho^2) = 5.818\,2572{\cdot}8 - 20 \\
log\,(1:\ 240\,\varrho^4) = 6.362\,0882\ \ - 30 & log\,(e'^2:\ 240\,\varrho^4) = 4.189\,4070\ \ - 30 \\
log\,(1:\ 480\,\varrho^4) = 6.061\,0582\ \ - 30 & log\,(e'^2:\ 480\,\varrho^4) = 3.888\,3770\ \ - 30 \\
log\,(1:\ 720\,\varrho^4) = 5.884\,9670\ \ - 30 & log\,(e'^2:\ 720\,\varrho^4) = 3.712\,2858\ \ - 30 \\
log\,(1:1440\,\varrho^4) = 5.583\,9370\ \ - 30 & log\,(e'^2:1440\,\varrho^4) = 3.411\,2558\ \ - 30
\end{array}\right\} \quad (33)$$

Um eine Übersicht zu gewinnen, wie viel die Glieder fünfter Ordnung in unseren Breiten etwa ausmachen, haben wir die folgenden zwei Übersichts-Tabellen berechnet, für den Gesamtbetrag der 3 Endglieder in (28) und (29).

I. Glieder fünfter Ordnung in der Formel (28) für σ, mit $\varphi = 50°$.

$b =$	$l + 2°$	$l = 4°$	$l = 6°$	$l = 8°$	$l = 10°$
2°	+ 0,00000″	+ 0,00000″	+ 0,00001″	+ 0,00001″	+ 0,00001″
4°	+ 0,00000	+ 0,00002	+ 0,00005	+ 0,00010	+ 0,00016
6°	+ 0,00001	+ 0,00006	+ 0,00014	+ 0,00030	+ 0,00048
8°	+ 0,00001	+ 0,00012	+ 0,00031	+ 0,00061	+ 0,00103
10°	+ 0,00002	+ 0,00018	+ 0,00056	+ 0,00111	+ 0,00186

(34)

II. Glieder fünfter Ordnung in der Formel (29) für λ, mit $\varphi = 50°$.

$b =$	$l = 2°$	$l = 4°$	$l = 6°$	$l = 8°$	$l = 10°$
2°	— 0,00000″	— 0,00000″	— 0,00001″	— 0,00003″	— 0,00012″
4°	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00004
6°	— 0,00004	— 0,00006	— 0,00006	— 0,00005	— 0,00005
8°	— 0,00011	— 0,00020	— 0,00025	— 0,00026	— 0,00022
10°	— 0,00028	— 0,00053	— 0,00070	— 0,00079	— 0,00078

(35)

Als erste Anwendung der entwickelten Formeln wollen wir unser fünftes Normal-Beispiel (5) § 74. S. 392 nehmen in dieser Weise:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Gegeben Berlin} & \varphi_1 = 52°\ 30'\ 16{,}7'' & \\
\phantom{\text{Gegeben }}\text{Königsberg} & \varphi_2 = 54°\ 42'\ 50{,}6'' & l = 7°\ 6'\ 0''
\end{array}\right\} \quad (36)$$

Es soll die geodätische Linie s zwischen beiden Punkten, und beide Azimute α_1 und α_2 berechnet werden.

Man bildet zuerst das Mittel der gegebenen Breiten:

$$\varphi = 53°\ 36'\ 33{,}65'' \quad (37)$$

Damit geht man in die Hilfstafeln Seite [5] und Seite [62]—[63] des Anhangs ein, und entnimmt die Coëfficienten:

$$log\ V = 0.000\ 5129.683 \quad (38)$$

$log\ (\lambda_1)$	$log\ (\lambda_2)$	$log\ (\lambda_3)$	$log\ (\lambda_4)$	$log\ (\lambda_5)$
6.17908_n	5.66582_n	4.414_n	4.756	4.065

Damit rechnet man nach der Formel (29), mit $l = 7° \; 6' \; 0'' = 25560$; das Hauptglied wird $25590{,}208\,116''$, dann die 5 Korrektionsglieder:

$$-0{,}024\,452'' \;,\; -0{,}050\,187'' \;,\; -0{,}000\,003'' \;,\; +0{,}000\,021'' \;,\; -0{,}000\,016',$$

$$\lambda = 25590{,}208\,116'' - 0{,}074\,637'' = 25590{,}133\,479''$$

$$\lambda = 7° \; 6' \; 30{,}133\,479'' \tag{39}$$

Wir haben hier mit 6 Dezimalen der Sekunden gerechnet, um zu sehen, wie weit sich überhaupt die drei letzten Glieder bemerklich machen; da dieselben nur 0,0002″ ausmachen, könnte man dieselben ganz weglassen.

Nun nehmen wir die reduzierten Breiten zu (36) nebst λ von (39) zusammen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Berlin} & \psi_1 = 52° \; 24' \; 43{,}01137'' \\ \text{Königsberg} & \psi_2 = 54° \; 37' \; 24{,}75639'' \end{array} \quad \lambda = 7° \; 6' \; 30{,}13348'' \right\} \tag{40}$$

Das dadurch bestimmte sphärische Dreieck haben wir nach den Gauss schen Formeln (4), (5) § 60. S. 339 aufgelöst, wodurch gefunden wurde:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 59° \; 33' \; 0{,}6889'' \qquad \alpha_2 = 65° \; 16' \; 9{,}3650'' \\ \qquad \sigma = 4° \; 46' \; 1{,}41023'' = 17161{,}41023'' \end{array}\right\} \tag{41}$$

Um σ auf s zu reduzieren, braucht man wieder Coëfficienten, zuerst $log\,U$ nach der Formel (25) mit Benützung des schon bei (38) berechneten $log\,V$:

$$log\,U = 8.510\,2946{\cdot}378.$$

Aus der Hilfstafel Seite [62]—[63] entnimmt man mit dem Argument $\varphi = 53° \; 36' \; 33{,}65''$ von (37), die 5 Coëfficienten-Logarithmen für s:

$log\,(\sigma_1)$	$log\,(\sigma_2)$	$log\,(\sigma_3)$	$log\,(\sigma_4)$	$log\,(\sigma_5)$
5.27256	5.66582_n	3.360_n	4.987	5.839_n

Damit rechnen wir nach der Formel (30), und haben zunächst das Hauptglied 5.724 2583·351 und die 5 logarithmischen Korrektionsglieder:

$$-0{\cdot}5146 \qquad +8{\cdot}5179 \qquad +0{\cdot}0000 \qquad -0{\cdot}0061 \qquad +0{\cdot}0002$$

Dieses giebt im ganzen:

$$log\,s = 5{\cdot}724\,2583{\cdot}351 + 7{\cdot}997 = 5{\cdot}724\,2591{\cdot}348 \qquad s = 529\,979{,}578^m \tag{42}$$

Die Länge s und die beiden Azimute von (41) stellen die Lösung vor, welche mit den entsprechenden Werten (31) und (39) des vorigen § 105. S. 529—531 hinreichend stimmen.

Nach diesem wollen wir noch unser grosses Normal-Beispiel (2) § 73. S. 391 behandeln:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Gegeben} & \varphi_1 = 45° \; 0' \; 0'' & l = 10° \; 0' \; 0'' \\ & \varphi_2 = 55° \; 0' \; 0'' & \\ \text{Mittel} & \varphi \;= 50° \; 0' \; 0'' & \end{array}\right\} \tag{43}$$

Damit geht man in die Hilfstafeln Seite [5] und Seite [62]—[63] ein, und entnimmt die Coëfficienten:

$$log\,V = 0.000\,6020{\cdot}131 \qquad log\,U = 8.510\,3836{\cdot}826 \tag{44}$$

$log\,(\sigma_1)$	$log\,(\sigma_2)$	$log\,(\sigma_3)$	$log\,(\sigma_4)$	$log\,(\sigma_5)$	
5.02731	5.73542_n	3.128_n	4.835	3.759_n	(45)
$log\,(\lambda_1)$	$log\,(\lambda_2)$	$log\,(\lambda_3)$	$log\,(\lambda_4)$	$log\,(\lambda_5)$	
$6.155\,215_n$	5.73542_n	4.376_n	4.506	4.156_n	(46)

Die Reduktion für λ nach der Formel (29) giebt das Hauptglied 36049,93731″ und die 5 Korrektionsglieder:

$$-0{,}667\,923'' \;,\; -0{,}149\,088'' \;,\; -0{,}001\,438'' \;,\; +0{,}000\,802'' \;,\; -0{,}000{,}148''$$

Im ganzen: $\lambda = 36049{,}93731'' - 0{,}817\,795'' = 36049{,}11952''$ (47)

Die beiden reduzierten Breiten sind:

$$\psi_1 = 44^\circ\ 54'\ 14{,}67493'' \qquad \psi_2 = 54^\circ\ 54'\ 35{,}31462'' \tag{48}$$

Diese ψ_1 und ψ_2 nebst λ von (47) bestimmen ein sphärisches Dreieck, dessen Auflösung giebt:

$$\alpha_1 = 29^\circ\ 3'\ 15{,}45983'' \qquad \alpha_2 = 36^\circ\ 45'\ 7{,}40055'' \tag{49}$$
$$\sigma_1 = 11^\circ\ 52'\ 41{,}20996'' = 42761{,}20996''$$

Zur Reduktion von σ auf s hat man die Formel (30) mit den Coëfficienten (45); das Hauptglied wird 6.120 6663·024 und die 5 Korrektionsglieder:

$$-5{\cdot}994\ ,\ +17{\cdot}961\ ,\ +0{\cdot}010\ ,\ -0{\cdot}206\ ,\ 0{\cdot}007$$

Im ganzen:

$$\log s = 6.120\,6663{\cdot}024 + 11{\cdot}778 = 6.120\,6674{\cdot}802 \qquad s = 1\,320\,284{,}365^{\mathrm{m}} \tag{50}$$

Die Werte (49) und (50) stellen die Lösung der Aufgabe vor, welche mit (40), (41), (45) des vorigen § 105. S. 530 verglichen, genügend stimmen.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1883" S. 81—82 haben wir eine Coëfficienten-Tabelle für die Formeln (28) und (29) gegeben, welche nicht dieselbe ist wie die neu berechnete Tabelle Seite [62]—[63] unseres Anhangs. Nur die Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_2) sind mit den früheren [1], [3], (1), (3) identisch, abgesehen von einer kleinen Differenz in den letzten Stellen von $\log(\sigma_1)$ und $\log(\lambda_1)$ daher rührend, dass früher $\frac{1}{V^4} = 1 - 2\,\eta^2$ gesetzt war, was Vernachlässigung von η^4 enthält, welche in den neuen Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_2) nicht mehr vorkommt. Ausserdem besteht der Unterschied, dass Funktionen $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$, $\cos^4\varphi$, welche früher in die Coëfficienten gezogen waren, nun in der Formel bleiben, damit die Coëfficienten-Tafel kleinere Differenzen bekommt. Nur der in η^2 enthaltene Faktor $\cos^2\varphi$ ist in die Coëfficienten gezogen, weil der Modul $\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi$ sich analytisch gut findet, und auch formell den Faktoren t^2 gegenüber in den Coëfficienten zum Gleichgewicht beiträgt.

Als ein weiteres Beispiel für die Anwendung des im vorstehenden § 106. behandelten Verfahren können wir die Mecklenburgische Diagonale citieren, welche schon unter unseren Normalbeispielen in § 73. S. 392 angegeben, in „Zeitschr. f. Verm. 1896" S. 240—248 berechnet wurde.

Kapitel X.

Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

Vorbemerkung. Dieses Kapitel enthält im Wesentlichen den Inhalt der Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas, auctore Carolo Friderico Gauss, Göttingae 1828 (societati regiae oblatae d. 8. Octob. 1827) und in „Carl Friedrich Gauss Werken", IV. Band, Göttingen 1873, S. 217—258. In deutscher Übersetzung herausgegeben: „Allgemeine Flächentheorie u. s. w. von A. Wangerin, Leipzig, Engelmann 1889."

Wir haben versucht, die analytischen Entwicklungen des ersten Teiles dieser klassischen Abhandlung durch unsere geometrischen Betrachtungen von § 107. und 108. zu ersetzen.

§. 107. Geodätischer Excess.

Dem sphärischen Excess, den wir in § 40. kennen gelernt haben, mit der Formel (2a) S. 231

$$\varepsilon = \frac{E}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F}{r^2}\,\varrho \text{ in Sekunden} \tag{1}$$