UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 108. Geodätische rechtwinklige Coordinaten und Polar-Coordinaten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Visual Library

dätischen Excess des Trapezes auf der krummen Fläche darstellt. Um diesen Winkel ε näher zu bestimmen, haben wir aus Fig. 5.:

$$\varepsilon = \Theta' - \Theta$$

oder wegen (13): $$\varepsilon = l\,(\sin(\varphi + d\,\varphi) - \sin\varphi) = l\cos\varphi\,d\,\varphi \tag{14}$$

Da der Parallelbogen $A\,B = N\,l\cos\varphi$ ist, kann für die Fläche des Trapezes nach (12) angegeben werden:

$$F = B\,C.A\,B \quad \text{also} \quad F = M\,N\,l\cos\varphi\,d\,\varphi \tag{15}$$

Mit Einführung des mittleren Krümmungs-Halbmessers r also mit $r^2 = M\,N$ hat man hieraus, mit (14):

$$l\cos\varphi\,d\,\varphi = \frac{F}{r^2} = \varepsilon \tag{16}$$

Der Längenunterschied l kann hiebei beliebig gross sein; zur weiteren Anwendung wollen wir aber auch l unendlich klein annehmen, und damit den Satz aussprechen, dass der Excess jedes unendlich kleinen Trapezes von der Form Fig. 5. sich nach der Formel (16) aus F und r^2 berechnen lässt. Endlich da jede andere unendlich kleine Fläche als zusammengesetzt aus unendlich kleinen Trapezen betrachtet werden darf, ist es nach dem Ergebnis unserer Betrachtung richtig, den Excess einer irgendwie begrenzten kleinen Fläche F des Umdrehungs-Ellipsoids, oder einer anderen Umdrehungsfläche nach der Formel (16) aus F und r^2 zu berechnen.

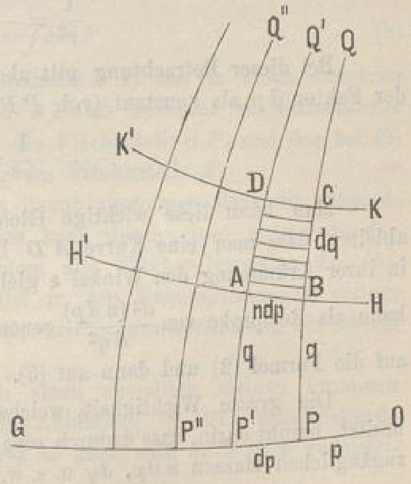
Wir haben also für den Excess eines Trapezes einer Umdrehungsfläche dieselbe Berechnung wie für den Excess eines kleinen geodätischen Dreiecks nach (10) S. 541, und wir können nun den weiteren Schluss bilden, dass für irgend einen durch kleine Dimensionen begrenzten Teil einer krummen Fläche, der geodätische Excess durch die Formel (10) oder (16) angegeben wird.

§ 108. Geodätische rechtwinklige Coordinaten und Polar-Coordinaten.

Ganz analog den Coordinaten-Systemen, welche wir in der Ebene mit geraden Linien und auf der Kugel mit grössten Kreisen benützen, kann man auch auf irgend einer Fläche mit geodätischen Linien Coordinaten-Systeme anordnen.

In Fig. 1. sei $O\,G$ eine geodätische Linie, auf welcher ein Punkt P durch das Mass $O\,P = p$ bestimmt ist, und ebenso auch andere Punkte P', P'' u. s. w. durch ihre auf der geodätischen Linie $O\,G$ gemessenen Abstände.

Fig. 1.



In den Punkten P, P', P'' u. s. w. werden geodätische Linien $P\,Q$, $P'\,Q'$, $P''\,Q''$ u. s. w. rechtwinklig zu $O\,G$ gezogen, und auf den Linien $P\,Q$ werden gleiche Masse q abgetragen, so dass eine geodätische Parallele $H\,H'$ entsteht, und eine zweite Parallele $K\,K'$ im Abstande $q + d\,q$ von der Anfangslinie $O\,G$.

Solcher Linien der zwei Systeme $P\,Q$ und $H\,H'$ können wir ganze Scharen gezogen denken; dieselben schneiden sich gegenseitig rechtwinklig (geodätische Parallele § 70. S. 381) und bilden ein System von Vierecken, deren eines $A\,B\,C\,D$ in Fig. 1. besonders hervorgehoben ist.

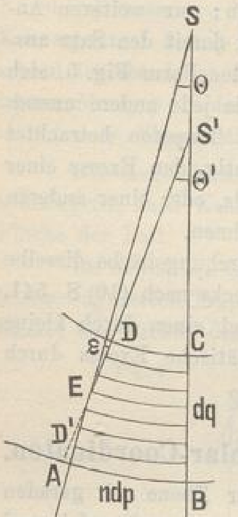
Die ganze Anordnung der Linien in Fig. 1. können wir ein rechtwinkliges geo-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

dätisches Coordinaten-System nennen, mit dem Nullpunkte O, von welchem die Abscissen p in der Richtung OG, und die Ordinaten q rechtwinklig zu OG gezählt werden. Es hat also der Punkt B die Coordinaten p, q, der Punkt C hat $p, q + dq$, der Punkt A hat $p + dp$, q u. s. w.

Der Abscissen-Unterschied PP' ist $= dp$ angenommen, und das entsprechende Mass BA haben wir mit $n\,dp$ bezeichnet, wobei n eine von der Krümmung der Fläche abhängige Funktion ist, mit welcher wir uns später besonders zu beschäftigen haben werden (§ 109. S. 546).

Fig. 2.



Nachdem somit alle Verhältnisse des Vierecks klar gemacht sind, betrachten wir in Fig. 2. die kongruente ebene Abbildung des Linienzuges $ABCD$ in dem Sinne von § 107.

Der Linienzug $ABCDA$ wird in der kongruenten Abbildung nicht schliessen, sondern einen Winkelschluss-Fehler $\varepsilon = \Theta' - \Theta$ geben, den wir nun näher zu bestimmen haben.

Der Winkel Θ kann mit den Bezeichnungen von Fig. 2. dargestellt werden (auch bei windschiefem Viereck) in der Form:

$$\Theta = -\frac{d(n\,dp)}{dq} \tag{1}$$

Dabei soll Θ selbst als positiv gelten, und die Ableitung von $n\,dp$ nach q muss negativ gesetzt werden, wenn $n\,dp$ abnimmt bei wachsendem q, wie in Fig. 2. angenommen ist.

Der kleine Winkel $\varepsilon = \Theta' - \Theta$ kann als Differential von Θ aufgefasst werden, d. h.:

$$\varepsilon = d\,\Theta = -\frac{d^2(n\,dp)}{dq^2}\,dq \tag{2}$$

Betrachtet man ferner die Fläche F des Vierecks, d. h. $F = n\,dp\,dq$, so hat man nach dem Schlusssatz von § 107. Seite 543:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} = \frac{n\,dp\,dq}{r^2} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n}\,\frac{1}{dp}\,\frac{d^2(n\,dp)}{dq^2} \tag{4}$$

Bei dieser Betrachtung gilt aber in der zweiten Ableitung von $n\,dp$ nach q der Faktor dp als konstant (vgl. $PP' = dp$ in Fig. 1.), es wird also:

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n}\,\frac{d^2 n}{dq^2} \tag{5}$$

Man kann diese wichtige Gleichung (5) bezw. (4) auch dadurch aus Fig. 2. ableiten, dass man eine Kurve AD betrachtet, welche AS und $D'S'$ berührt, also in ihrer Krümmung den Winkel ε giebt. Der Krümmungs-Halbmesser der Kurve AD kann als Reciproke von $\frac{d^2(n\,dp)}{dq^2}$ genommen werden, und damit kommt man ebenfalls auf die Formel (2) und dann auf (5).

Die grosse Wichtigkeit, welche die Differential-Formel (5) für die Geodäsie besitzt, beruht darin, dass dadurch eine Beziehung hergestellt wird zwischen geodätisch zugänglichen Massen $n\,dp$, dq u. s. w. einerseits, und dem geodätisch unzugänglichen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Krümmungs-Halbmesser r andererseits. Legt man das Messungs-System Fig. 1. in einer Ebene an, so wird das Viereck $ABCD$ ein Rechteck mit $BA = CD = PP'$; und auf einer krummen Fläche gestatten die geodätisch messbaren Verkürzungen von BA und CD gegen PP', nach dem Gesetz der Formel (5) einen Schluss auf die Krümmung der Fläche.

Polar-Coordinaten.

In ähnlicher Weise, wie ein System rechtwinkliger Coordinaten in Fig. 1. gebildet wurde, kann man auch ein System von Polar-Coordinaten mit geodätischen Linien anordnen.

Man braucht nur anzunehmen, dass in Fig. 1. die geodätischen Linien PQ, $P'Q'$, $P''Q''$ u. s. w., welche alle von einer Abscissenlinie OP ausgehen, statt dessen alle von einem Punkte (in der Verlängerung von Q) ausgehen, oder alle nach einem Punkte zusammenlaufen, und dass dann die Linien HH', KK', nicht mehr geodätische Parallelen, sondern geodätische Kreise um jenen Punkt seien; dann kann man alles, was sich auf Fig. 1. bezieht, auch auf das beschriebene Polar-System übertragen.

Das Krümmungsmass.

Als „mittleren Krümmungs-Halbmesser“ r in einem Punkte einer krummen Fläche haben wir das geometrische Mittel der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser N und M bezeichnet, also $r = \sqrt{MN}$ oder $r^2 = MN$ gesetzt.

Der reciproke Wert von r^2 wird nach Gauss das „Krümmungsmass“ (mensura curvaturae) genannt, d. h. es ist:

$$\text{Krümmungsmass } k = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{MN} \tag{6}$$

und mit dieser neuen Bezeichnung schreiben wir die wichtige Gleichung (5) nochmals, d. h.:

$$k = \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n}\frac{d^2 n}{d q^2} \tag{7}$$

Gleichzeitig damit ist der Begriff und die Bezeichnung Gesamtkrümmung (curvatura totalis seu integra) eines begrenzten Flächenteils eingeführt worden, nämlich:

$$\text{Gesamtkrümmung} = \int k\, dF \tag{8}$$

Das Produkt eines differentialen Flächenteiles dF in das für einen einzelnen Punkt von dF giltige und im Bereiche von dF als konstant zu betrachtende Krümmungsmass k giebt die Gesamtkrümmung des Flächenteils dF, und das bei (8) angegebene Integral giebt die Gesamtkrümmung des Flächenteils F.

Diese Begriffe und Benennungen hängen damit zusammen, dass die Gesamtkrümmung eines Flächenteils F gemessen werden kann durch einen entsprechenden Teil F' einer Kugel vom Halbmesser $= 1$, indem alle Flächen-Normalen der Begrenzungs-Linie von F mit sich selbst parallel in den Kugelmittelpunkt verlegt werden, und so den Teil F' der Kugel begrenzen, welcher gewissermassen ein Abbild des Flächenteils F wird.

Sobald man sich überzeugt hat, dass für einen unendlich kleinen krummen Flächenteil dF der durch kongruente Umfangs-Abbildung (§ 107.) darzustellende geodätische Excess $d\varepsilon = k\,dF$ ist (wo $k = 1 : r^2$), so kann man auch nach geometrischer Anschauung so weiterschliessen:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Fläche F wird in eine grosse Zahl kleiner Teilflächen dF zerlegt, welche alle ihrem Umfang nach in einer Ebene geschlossen, folglich nicht kongruent, abgebildet werden. Bei einem ersten Teil dF_1 wird in der Abbildung der Schluss erzwungen durch eine lineare relative Krümmung $d\varepsilon_1$, welche irgendwo an dem Umfang von dF_1 angebracht werden muss. Ein an dieser Stelle ansetzender zweiter Flächenteil dF_2 muss dann, wenn er in der Ebene geschlossen dargestellt werden soll, nicht bloss seinen eigenen Excess $d\varepsilon_2$, sondern auch den von dF_1 ihm zugeschobenen Betrag $d\varepsilon_1$, durch eine der konformen Abbildung widersprechende lineare Krümmung $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2$ zum Ausdruck bringen. So wird das ebene Kartenbild $\int dF'$, wenn es die einzelnen Teile dF' sämtlich geschlossen darstellt, an seinem Umfange allmählich alle Beträge $d\varepsilon$ in Gestalt von linearen Krümmungen, die der kongruenten Abbildung des Umfangs widerstreiten, zum Ausdruck bringen, und der Polygon-Schlussfehler ε des kongruent abgebildet gedachten Umfangs wird daher der Summe aller Einzel-Excesse der Flächenteile gleich sein, d. h.:

$$\varepsilon = \int k\, dF \tag{9}$$

Dieses ist mit (8) übereinstimmend.

Bei einer abwickelbaren Fläche ist in jedem Punkte der eine Haupt-Krümmungs-Halbmesser unendlich, der andere endlich, setzen wir also $N = \infty$, $M = M$, so wird auch $r^2 = \infty$ und $k = 0$, folglich auch die Gesamtkrümmung nach (8) und der Excess ε nach (9), beide $=$ Null.

§ 109. Verbindung eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems.

In Fig. 1. S. 547 ist O der Ausgangspunkt zweier geodätischer Coordinaten-Systeme, eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems, so dass z. B. der Punkt A die rechtwinkligen Coordinaten p, q und die Polar-Coordinaten s, α hat. Entsprechend hat der Punkt B die rechtwinkligen Coordinaten $p + dp$, $q + dq$ und die Polar-Coordinaten $s + ds$, $\alpha + d\alpha$.

Ausser dem Richtungswinkel α des Polar-Systems ist der Winkel β eingeführt, welchen der Strahl s und die Ordinate q bei A miteinander bilden.

Zwischen beiden Ordinaten q und $q + dq$ bei A sei der Querabstand $AD = n\,dp$ und entsprechend $AC = m\,d\alpha$ der Querabstand bei A zwischen den beiden Strahlen OA und OB.

Dabei sind n und m Funktionen von ähnlicher Bedeutung wie n im vorigen § 108. bei (1)—(5) S. 544. Zur Verdeutlichung dieser Funktionen n und m mag man sich etwa den Fall denken, dass das ganze System auf einer Kugel vom Halbmesser r läge, dann wäre sehr einfach:

$$\left.\begin{array}{ll} n = \cos\dfrac{q}{r} & m = \sin\dfrac{s}{r} \\ \text{oder entwickelt: } n = 1 - \dfrac{q^2}{2r^2} + \ldots & m = \dfrac{s}{r} - \dfrac{s}{6r^3} + \ldots \end{array}\right\} \text{(Kugel)} \tag{1}$$

Zur Untersuchung des allgemeinen Falles irgend einer krummen Fläche, auf welcher das System Fig. 1. S. 547 liege, betrachten wir zuerst das kleine Viereck $ACBD$, welches bei C und D rechtwinklig ist. Indem wir in differentialem Sinne

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN