Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 109. Verbindung eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Die Fläche F wird in eine grosse Zahl kleiner Teilflächen dF zerlegt, welche alle ihrem Umfang nach in einer Ebene geschlossen, folglich nicht kongruent, abgebildet werden. Bei einem ersten Teil dF_1 wird in der Abbildung der Schluss erzwungen durch eine lineare relative Krümmung $d\varepsilon_1$, welche irgendwo an dem Umfang von dF_1 angebracht werden muss. Ein an dieser Stelle ansetzender zweiter Flächenteil dF_2 muss dann, wenn er in der Ebene geschlossen dargestellt werden soll, nicht bloss seinen eigenen Excess $d\varepsilon_2$, sondern auch den von dF_1 ihm zugeschobenen Betrag $d\varepsilon_1$, durch eine der konformen Abbildung widersprechende lineare Krümmung $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2$ zum Ausdruck bringen. So wird das ebene Kartenbild $\int dF'$, wenn es die einzelnen Teile dF' sämtlich geschlossen darstellt, an seinem Umfange allmählich alle Beträge $d\varepsilon$ in Gestalt von linearen Krümmungen, die der kongruenten Abbildung des Umfangs widerstreiten, zum Ausdruck bringen, und der Polygon-Schlussfehler ε des kongruent abgebildet gedachten Umfangs wird daher der Summe aller Einzel-Excesse der Flächenteile gleich sein, d. h.:

$$\varepsilon = \int k\, dF \tag{9}$$

Dieses ist mit (8) übereinstimmend.

Bei einer abwickelbaren Fläche ist in jedem Punkte der eine Haupt-Krümmungs-Halbmesser unendlich, der andere endlich, setzen wir also $N = \infty$, $M = M$, so wird auch $r^2 = \infty$ und $k = 0$, folglich auch die Gesamtkrümmung nach (8) und der Excess ε nach (9), beide $=$ Null.

§ 109. Verbindung eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems.

In Fig. 1. S. 547 ist O der Ausgangspunkt zweier geodätischer Coordinaten-Systeme, eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems, so dass z. B. der Punkt A die rechtwinkligen Coordinaten p, q und die Polar-Coordinaten s, α hat. Entsprechend hat der Punkt B die rechtwinkligen Coordinaten $p + dp$, $q + dq$ und die Polar-Coordinaten $s + ds$, $\alpha + d\alpha$.

Ausser dem Richtungswinkel α des Polar-Systems ist der Winkel β eingeführt, welchen der Strahl s und die Ordinate q bei A miteinander bilden.

Zwischen beiden Ordinaten q und $q + dq$ bei A sei der Querabstand $AD = n\,dp$ und entsprechend $AC = m\,d\alpha$ der Querabstand bei A zwischen den beiden Strahlen OA und OB.

Dabei sind n und m Funktionen von ähnlicher Bedeutung wie n im vorigen § 108. bei (1)—(5) S. 544. Zur Verdeutlichung dieser Funktionen n und m mag man sich etwa den Fall denken, dass das ganze System auf einer Kugel vom Halbmesser r läge, dann wäre sehr einfach:

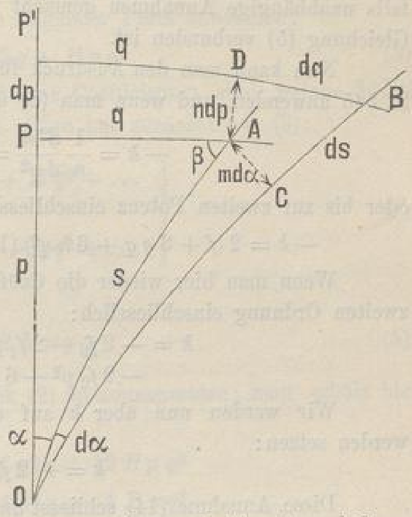
$$\left.\begin{array}{ll} n = \cos\dfrac{q}{r} & m = \sin\dfrac{s}{r} \\ \text{oder entwickelt: } n = 1 - \dfrac{q^2}{2r^2} + \ldots & m = \dfrac{s}{r} - \dfrac{s}{6r^3} + \ldots \end{array}\right\} \text{(Kugel)} \tag{1}$$

Zur Untersuchung des allgemeinen Falles irgend einer krummen Fläche, auf welcher das System Fig. 1. S. 547 liege, betrachten wir zuerst das kleine Viereck $ACBD$, welches bei C und D rechtwinklig ist. Indem wir in differentialem Sinne dieses Viereck als eben behandeln, entnehmen wir aus demselben durch Coordinaten-Umformung die Gleichungen:

$$d\,s = n\,d\,p\,\sin\beta + d\,q\cos\beta \qquad (2)$$

$$m\,d\,\alpha = d\,q\sin\beta - n\,d\,p\cos\beta \qquad (3)$$

Fig. 1.



oder in Gestalt von Differential-Gleichungen:

$$\frac{\partial s}{\partial p} = n\sin\beta \qquad \frac{\partial s}{\partial q} = \cos\beta \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -\frac{n}{m}\cos\beta \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial q} = \frac{1}{m}\sin\beta \quad (5)$$

Aus den beiden Gleichungen (4) folgt durch Quadrieren:

$$n^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 + n^2\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^2 \qquad (6)$$

ferner aus (4) und (5) durch Multiplizieren:

$$\frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -n^2\frac{\partial s}{\partial q}\frac{\partial \alpha}{\partial q} \qquad (7)$$

Nun muss die Funktion n entsprechend der Flächen-Krümmung eingeführt werden. Um die Beziehung von n zu der Flächen-Krümmung zunächst unbestimmt zu halten, wird n als algebraische Funktion mit unbestimmten Coëfficienten $f, g, h \ldots$ eingeführt:

$$n = 1 + f\,q^2 + g\,q^3 + h\,q^4 + \ldots \qquad (8)$$

Dabei ist kein Glied mit der ersten Potenz q angenommen, weil nach (1) die Bedeutung von n so ist, dass auf einer Kugel kein Glied mit q vorkommt, und weil dasselbe auch bei dem Ellipsoid und allen Flächen von stetiger konvex-konvexer Krümmung der Fall ist, oder allgemeiner, weil dem rechtwinkligen Abgehen der Ordinaten q von der Abscissenaxe $O\,P$ in Fig. 1., die erste Ableitung $\frac{d\,n}{d\,q}$ für $q = 0$, selbst $= 0$ entsprechen muss.

Durch die Gleichung (8) ist n nur als Funktion von q dargestellt; um n auch als Funktion von p zu erhalten, muss man die Coëfficienten f, g, h u. s. w. von (8) selbst wieder als Funktionen von p darstellen, dieses geschehe durch die Annahmen:

$$\left.\begin{aligned} f &= f_0 + f_1\,p + f_2\,p^2 + \cdots \\ g &= g_0 + g_1\,p + g_2\,p^2 + \cdots \\ h &= h_0 + h_1\,p + h_2\,p^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Wenn man diese Ausdrücke (9) in (8) einsetzt, und dabei nur die Glieder bis zur vierten Potenz einschliesslich beibehält, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} n = 1 + f_0\,q^2 &+ f_1\,p\,q^2 + f_2\,p^2\,q^2 + \ldots \\ &+ g_0\,q^3 \quad + g_1\,p\,q^3 \quad + \ldots \\ &\qquad\qquad + h_0\,q^4 \quad + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Wenn man dieses zweimal partiell nach q ableitet, und dann wieder die Bedeutung der Coëfficienten (9) berücksichtigt, oder wenn man unmittelbar (8) nach q zweimal ableitet, so bekommt man:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial q^2} = 2\,f + 6\,g\,q + 12\,h\,q^2 \qquad (11)$$

Durch diese Annahmen für die Funktion n ist die krumme Fläche, auf welcher das Coordinaten-System Fig. 1. liegt, soweit charakterisiert, als für die nachfolgenden geodätischen Aufgaben nötig ist; für die analoge Funktion m dürfen nicht etwa ebenfalls unabhängige Annahmen gemacht werden, weil m bereits mit n durch die erste Gleichung (5) verbunden ist.

Nun kann man den Ausdruck für das Krümmungsmass nach (5) und (7) § 108. S. 545 anwenden, und wenn man (8) und (11) hier einsetzt, so bekommt man:

$$-k = \frac{1}{n}\frac{d^2 n}{d\,q^2} = \frac{2f + 6\,g\,q + 12\,h\,q^2}{1 + f\,q^2 + g\,q^3 + h\,q^4}$$

oder bis zur zweiten Potenz einschliesslich genau:

$$-k = 2\,(f + 3\,g\,q + 6\,h\,q^2)\,(1 - f\,q^2) = 2\,(f + 3\,g\,q + (6\,h - f^2)\,q^2) \tag{12}$$

Wenn man hier wieder die Coëfficienten (9) einsetzt, so bekommt man bis zur zweiten Ordnung einschliesslich:

$$\left.\begin{aligned} k = &-2\,f_0 - 2\,f_1\,p - 6\,g_0\,q \\ &-2\,f_2\,p^2 - 6\,g_1\,p\,q - (12\,h_0 - 2\,f_0^2)\,q^2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wir werden nun aber k auf eine lineare Funktion beschränken, d. h. wir werden setzen:

$$k = -2\,f_0 - 2\,f_1\,p - 6\,g_0\,q \tag{14}$$

Diese Annahme (14) schliesst in sich, dass in (13) ist:

$$f_2 = 0\ ,\quad g_1 = 0\ ,\quad 12\,h_0 = 2\,f_0^2 \text{ oder } h_0 = \frac{1}{6}\,f_0^2 \tag{15}$$

Damit reduziert sich auch das frühere n von (10) auf:

$$n = 1 + f_0\,q^2 + f_1\,p\,q^2 + g_0\,q^3 + \frac{1}{6}\,f_0^2\,q^4 \tag{16}$$

Im Folgenden braucht man mehrfach auch $\frac{1}{n}$, weshalb man nach S. 169 die Reciproke entwickelt:

$$\frac{1}{n} = 1 - f_0\,q^2 - f_1\,p\,q^2 - g_0\,q^3 + \frac{5}{6}\,f_0^2\,q^4 \tag{17}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Theorie des geodätischen Dreiecks übergehen.

§ 110. Reihen-Entwicklung für das rechtwinklige geodätische Dreieck.

Wir haben von (6) § 109. S. 547:

$$n^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 + n^2\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^2 \tag{1}$$

Um hier statt der Ableitungen von s nach p und nach q die entsprechenden Ableitungen von s^2 einzuführen, hat man:

$$\frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,p} = \frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,s}\,\frac{\partial\,s}{\partial\,p} = 2\,s\,\frac{\partial\,s}{\partial\,p} \text{ und } \frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,q} = 2\,s\,\frac{\partial\,s}{\partial\,q} \tag{1a}$$

also:

$$n^2 = \left(\frac{1}{2\,s}\,\frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,p}\right)^2 + n^2\left(\frac{1}{2\,s}\,\frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,q}\right)^2$$

oder:

$$4\,s^2 = \left(\frac{1}{n}\,\frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,p}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,(s^2)}{\partial\,q}\right)^2 \tag{2}$$